

D'ALEMBERT : CONTROVERSES ET PROBABILITES

Léo Gerville-Réache¹ & Ingrid Rochel²

¹Université de Bordeaux, IMS-UMR 5218, France, leo.gerville-reache@u-bordeaux.fr

²Université de Bordeaux, France, ingrid.rochel@u-bordeaux.fr

Résumé : Jean le Rond D'Alembert, dont on célèbre le trois centième anniversaire est connu des statisticiens pour ses positions curieuses en matière de probabilités. Plus largement, ce savant cultivait l'art du doute scientifique et s'opposait ainsi à la pensée unique. A travers ses correspondances parfois virulentes, nous rendons hommage à ce grand académicien enthousiaste et revenons sur son analyse du jeu *Croix ou pile*.

Mots clé : D'Alembert, controverses, correspondances, croix ou pile, Bates.

Abstract : Jean le Rond D'Alembert, whose three hundredth anniversary is celebrated, is known to statisticians for his curious positions on probabilities. More broadly, this scientist cultivated the art of scientific doubt and thus opposed the single thought. Through his sometimes virulent correspondence, we pay tribute to this great enthusiastic academician and return to his analysis of the "croix ou pile" game.

Key words: D'Alembert, controverses, correspondances, croix ou pile, Bates.

1 Introduction

Bien que les statistiques existent sous différentes formes depuis l'antiquité, il a fallu attendre le milieu du XVIIIème siècle pour que le terme de « Statistique » soit employé. Le siècle des Lumières voit alors l'émergence de grands érudits, savants ; l'un d'eux connu pour des prises de positions marquées, voire atypique et unique est Jean Le Rond d'Alembert.

D'Alembert fut au cœur des plus grandes querelles ; controverses en son temps, toutefois, si ses prises de positions furent souvent décriées, elles furent également partagés et relayées par l'un de ses amis et pas des moindres, Jean Condorcet. Condorcet, brillant probabiliste fut le légataire universel de d'Alembert. Il nous fit ainsi parvenir la vision des statistiques et des probabilités de d'Alembert. Notre travail offre ici une lecture nouvelle de l'héritage de d'Alembert dans le monde des Sciences. En effet, notre étude s'est portée sur une analyse rhétorique et didactique de 197 lettres de 1747 à 1783, dont 26 échangées avec Euler. On peut dès lors constater que la majorité de ces missives s'inscrivent dans des débats et polémiques scientifiques. En parfait statisticien, d'Alembert a pris part aux études de l'Etat en nous offrant un grand nombre d'avis et d'objections quant aux affaires politiques et religieuses du Royaume, notamment face à Necker, alors Intendant général des Finances. Il y évoque d'ailleurs à plusieurs reprises « les annuités » et les calculs des rentes viagères afin de mettre en avant la crise financière que connaît la France d'Ancien Régime à la veille de la Révolution.

Cependant, notre lecture de cet homme de sciences et de lettres va se borner ici à présenter un savant contesté et contestataire. En effet, d'Alembert qui a indéniablement contribué en son temps aux probabilités par ses doutes constants et ses réflexions, fut pourtant souvent porté en ridicule. Pourtant, aujourd'hui, plus de deux siècles après, l'historiographie est en train de lui accorder une relative réhabilitation. Si d'Alembert est connu pour ses doutes à partir de l'article « croix ou pile » de l'Encyclopédie ou pour sa participation active à la controverse de St Petersburg, nous allons ici démontrer et présenter d'Alembert sous une lecture transversale de sa correspondance privée. Correspondance qui se fait l'écho de ces doutes et objections présents dans toute son œuvre scientifique. On note ainsi qu'il alimente volontairement des échanges ostensibles et visibles en entretenant lui-même les différentes querelles. En effet, d'Alembert est constant dans ses prises de positions et se montre tantôt offusqué et victime, tantôt auteur des controverses.

2 D'Alembert, un homme de controverse : les sciences et les scientifiques.

A travers l'étude de sa correspondance privée, on peut aisément retrouver les thèmes de prédilection des sujets scientifiques qui ont parsemé sa vie et son œuvre. On a ainsi trace de ses réflexions et de ses échanges de position sur l'astronomie, l'optique, les fluides, la mécanique, les mathématiques, les probabilités et même la musique ou l'histoire... En outre, l'étude de cette correspondance met en exergue les liens, les relations, les échanges entre l'ensemble des scientifiques des cours européennes du XVIIIème siècle. D'Alembert fut de par son réseau rapidement membre de tous les salons et Académies. Ses amitiés avec les plus grands monarques, de Frédéric II à Berlin en passant par Catherine II de Russie, à laquelle il refusa d'ailleurs de prendre en charge l'éducation de son fils, lui permirent d'échanger avec les plus grands savants et scientifiques. On trouve ainsi dans ses correspondants, Gabriel Cramer, Charles Marie de la Condamine, Paolo Frisi, Samuel Formey, Louis de Maupertuis... Cette liste non exhaustive va nous permettre d'élaborer une analyse des prises de position et des échanges scientifiques de l'époque. En effet, on s'aperçoit que ce personnage controversé a participé à un grand nombre de débats auprès de ses contemporains. Il avait un avis « éclairé » à donner sur tout et sur tous.

Tout d'abord, sur la musique, il prit part à la querelle des Bouffons du côté de la vision d'ouverture prônée et souhaitée par Rousseau face à la vision de défense de Jean Philippe Rameau. « *Rousseau vient de donner une lettre contre la musique Française, (...) le déchainement contre elle est affreux, c'est bien pis que contre la prophétie. A entendre les partisans de la musique Française on croirait qu'il ne s'agit pas moins que de la destruction de l'Etat !* ». Cet exemple, illustre parfaitement le ton rarement modéré que d'Alembert utilise dans ses propos. Cela tranche d'ailleurs avec l'obligeance bien connue et la flatterie présente dans toutes ces lettres, cela nous prouve qu'il sait parfaitement manier les mots à son avantage.

Aux jeux des jugements, il était également l'objet d'attaques directes comme on peut le voir par exemple à travers la missive qu'il reçut en novembre 1773 de Vausenville à propos de la quadrature du cercle. « *Je vous présentais ma démonstration par écrit, pour vous convaincre de la vérité que j'annonçais, je vous sollicitai à la lire, mais ce fut en vain, vous ne daignâtes, ni voir, ni lire, ni entendre : vous eûtes seulement la complaisance de dire qu'il y avait cent millions à parier contre l'unité que j'étais dans l'erreur. Je vous prie, Monsieur, de dire hautement sur quel fondement, avez-vous pu tirer une pareille conclusion, contre un homme enrôlé parmi les savants de l'année 1754, (...) sur le rapport de Mr defouchy & de Mairan qui l'avaient examinée pour montrer vos torts, & vos erreurs (...) en s'attachant à une opinion mal fondée, à une chimère, démentie par ses propres faits. (...) N'avez-vous pas à craindre que la postérité n'ait à vous reprocher, que loin d'améliorer les connaissances humaines, vous ne cherchez qu'à les envelopper.* »¹ Cette critique directement acerbe de notre savant nous montre qu'il ne laissait personne indifférent. En réalité, d'Alembert, allait souvent à contre-courant des conceptions généralement admises par tous. Il remettait sans cesse en cause les applications et les théories scientifiques. C'est en raison de toutes les différentes objections et de ses doutes qu'il devint une cible pour l'époque. Ses positions atypiques suscitérent des réactions violentes de la part de ses détracteurs et des réponses tout aussi virulentes de sa part. En devenant la cible de tant de critiques, cela l'amena même à se retirer de la rédaction de l'Encyclopédie, comme on en retrouve trace par exemple dans sa correspondance avec Jacob Vernes, « *Je viens de renoncer à l'Encyclopédie, (...), ce sont les personnalités odieuses et même infâmes qu'on publie contre nous avec approbation & protection du gouvernement, les sermons qu'on prêche à la Cour et dans les Eglises, les censeurs nouveaux qu'on veut nous donner & qui y exerceront une inquisition intolérable contre ...qui me font chercher [...] silence.* »²

Homme de controverse, d'Alembert fut aussi l'instigateur de plusieurs querelles. Nous trouvons ainsi dans toute sa correspondance des références sur les plus connues comme celle contre le journal de Trevoux auprès de Malesherbes, et bien évidemment celle avec Euler et Bernoulli... L'une des plus douloureuses pour d'Alembert fut l'affaire Tolomas qui opposa D'Alembert et l'Académie

¹ Lettre de Vausenville à d'Alembert, 73.102 Archives de l'Académie des Sciences de Paris, novembre 1773

² Lettre de d'Alembert à Jacob Vernes, 58.07 Bibliothèque de Genève, 15 janvier 1758

Royale des Sciences de Lyon. Cette affaire publique commença le 30 novembre 1754, le jour même où il fut reçu à l'Académie Française à Paris. Il s'agit d'une attaque virulente suite à une harangue prononcée en latin par le père jésuite Tolomas contre les encyclopédistes mais en ciblant en terme injurieux plus particulièrement d'Alembert « Homuncio cui nec est pater, nec res »³. Il est à noter que cette critique s'inscrit dans une formulation faisant à la fois injure à son physique et à ses origines. La réaction de d'Alembert de ne se fit point attendre et les échanges et protestations furent nombreux « Messieurs, ne me permet pas d'être indifférent sur les outrages publics d'un de vos confrères. J'ose donc espérer de votre Equité et de vos lumières, ou que vous voudrez bien me faire justice publique sur ce sujet de la manière que vous jugerez le plus convenable »⁴.

D'Alembert alla même jusqu'à se plaindre de ces procédés auprès de Soufflot ou de Bourgelat afin d'obtenir réparation de son honneur face à cette « injustice » : « Vous savez avec quelle indignité le P. Tolomas m'a traité (...), J'espère que vous voudrez bien employer en ma faveur tout le crédit que votre mérite & votre place de directeur vous donnent dans cette Compagnie »⁵. « Il faut avoir une grande envie de calomnier, même en pure perte & sans la moindre vraisemblance, pour oser répandre comme l'on fait, (...), mes démarches (...) n'auraient servi d'ailleurs qu'à apprendre à toute l'Europe Littéraire, ce qu'elle doit attendre & penser de la Société de Lyon. (...) Personne ne sait mieux que moi, qu'on ne doit jamais entretenir le public de ses querelles particulières ; mais je ne puis me refuser au devoir de confondre l'imposture (...) »⁶

Enfin, dans l'éventail des querelles et des controverses scientifiques, on trouve en première ligne celle avec Euler. Il ne s'agit pas ici de revenir en détail sur celle-ci mais plutôt de mettre en avant ses convictions et le débat de priorité que les savants pouvaient se livrer et les injures proférées. D'Alembert se montre dès lors obsédé par les crédits de ses contemporains. Cette discordance a mis en évidence l'obsession et l'orgueil de notre savant. D'Alembert, furieux cria à l'injustice. Le nuage de mots ci-dessous illustre les tenants des échanges et des objets de mécontentements entre les principaux protagonistes d'Alembert d'un côté et Euler et Bernoulli de l'autre.



les attaques d'Euler et Bernoulli (Rouge) et la défense de d'Alembert (Bleu)

Toutes ces différentes lettres dénotent de l'opiniâtreté de d'Alembert à obtenir réparation des critiques qui lui étaient faites. Dès lors, on s'aperçoit que plus les années passèrent, et plus d'Alembert, se plaça au-dessus de toutes ces critiques et de conclure ainsi : « Ils me remercieront peut être au lieu de se plaindre. »⁷

3 D'Alembert, un homme de paradoxe : entre doutes et convictions.

Comme on a pu le voir, d'Alembert fut l'objet aussi bien de critique que de déférence de l'ensemble du monde scientifique, ses réponses virulentes furent alors un moyen de remettre en cause sa vision scientifique. En effet, D'Alembert, apparaît au cours de ces années de correspondances comme un savant qui pouvait paradoxalement à la fois douter et être convaincu de ses démonstrations. D'Alembert nous apparaît comme quelqu'un de sûr de lui, de déterminé et qui ne lâchait pas

³ Un petit homme sans père, ni fortune.

⁴ Lettre de d'Alembert à la Société Royale de Lyon, 55.03 Académie des sciences de Lyon, 30 janvier 1755

⁵ Lettre de d'Alembert à Soufflot, 55.07 Académie des sciences de Lyon, 9 mars 1755

⁶ Lettre de d'Alembert à Bourgelat, 55.09 Académie des sciences de Lyon, 7 avril 1755

⁷ Lettre de d'Alembert à Vernes, 57.32 Bibliothèque de Genève, 17 décembre 1757

l'affaire estimant avoir toujours raison. Toutes les critiques dont il a pu faire l'objet, lui ont indéniablement permis d'être plus fort et de se forger des convictions en remettant tout en doute. Ainsi, on trouve dans ces lettres, un effort constant et constructif dans son analyse des sciences et lors de ses échanges de points de vue même si cela fut fait de manière acerbe à bien des égards. D'Alembert est connu des statisticiens pour ses doutes sur le calcul des probabilités mais en réalité ils se sont portés sur tous les sujets. Il était réellement obsédé par les crédits que l'on pouvait lui porter même s'il s'en défendait à la fin de sa vie. C'est le seul témoignage où il paraît « lâcher un peu prise », « *La rage de mes adversaires, (...) en invectives contre moi dans des journaux que je ne lis jamais. (...) C'est à moi de leur répondre par le silence et le mépris qu'ils méritent (...)* »⁸ Il est vrai qu'il s'est souvent targué de mépriser ces adversaires par le silence, mais c'était plus fort que lui, il trouvait toujours un moyen de leur répondre par un biais ou un autre. On peut ainsi dire que d'Alembert apparaît comme un savant susceptible, arrogant et orgueilleux de par les convictions d'avoir raison et de la primauté de la priorité de la « découverte » : « Il est assez désagréable de travailler en même temps qu'un autre sur un sujet comme celui-là ; c'est ce qui a fait que je me suis pressé de finir pour m'emparer de la précession des Equinoxes qui est une matière vierge. »⁹

Ainsi, si d'Alembert pouvait douter de lui, il ne supportait en revanche absolument pas que l'on doute de lui. Toutes les critiques provoquèrent des réactions virulentes de sa part en montrant une absence de considération pour son détracteur. « *Pour moi, accoutumé à toutes ces vilénies, je ne fais qu'en rire de pitié.* »¹⁰, « *Mr. l'abbé de Gua est un homme qui se plaint de tout le monde à tort, & dont tout le monde se plaint avec raison. On dit qu'il prépare une critique du prospectus. Il fera bien de ne la pas donner du tout.* »...

Il savait toutefois également nuancer ses propos, avec l'humilité qui pouvait le caractériser, en anticipant les réactions que cela pouvait provoquer, « *J'ai remis à Diderot mon article (qui était bon) mais il faudra l'adoucir un peu pour la Sorbonne.* » A travers cette étude, on constate qu'il était soutenu dans ces démarches scientifiques par celui qu'il considérait comme un vrai mentor, Cramer. On trouve une multitude d'échanges entre les deux hommes. Il paraît évident que d'Alembert soumettait ses idées à Cramer. « *Il faut presque que la probabilité vienne au secours de la certitude. Cette remarque me paraît très vraie, très heureuse et très neuve.* »¹¹

Cramer paraissait être la seule personne dont d'Alembert attendait et quémandait des observations. « *J'espère dans trois semaines (...) savoir votre avis. Je vous prie de me donner vos remarques* », « *Je recevrai avec beaucoup de plaisir & de reconnaissance vos remarques (...); je vous supplie même de vouloir bien nous en donner.* » ... En retour, Cramer ne manquait pas de stimuler d'Alembert en lui offrant des champs de réflexion plus élargis ; « *Ce n'est pas assez de mettre Newton à l'honneur : il faut renchérir sur lui & entrer dans des précisions qui paraissent lui avoir échappé.* »¹²

S'il apparaît dans ces quelques extraits comme un homme convaincu par sa science, on découvre paradoxalement un homme qui doute constamment de tout, de tous et surtout de lui-même. « *La maladresse de nos astronomes et le peu de clarté avec lequel leurs tables sont (...), je ne désespère pas même qu'on ne puisse en corrigeant les tables de M. Newton, déterminer le lieu de la Lune très exactement...* »¹³. « *Pour les Tuyaux capillaires, je ne sais pas bien encore si c'est l'attraction qui en produit les Phénomènes. Mais quand cela serait, j'aimerais bien autant admettre deux lois d'attraction différentes, qu'une seule. (...) Je ne connais point, Monsieur, de démonstration rigoureuse de l'impossibilité de la quadrature définie du cercle, mais je crois la chose si difficile, que je doute qu'on y parvienne.* » .

Ainsi, on peut voir que pour d'Alembert, la résolution d'un problème provoquait de nouveaux questionnements et doutes « *Au reste ce problème à la solution duquel j'ay donné beaucoup de*

⁸ Lettre de d'Alembert à Cadet le Vaux, 79.55 Collections Particulières, 18 juillet 1779

⁹ Lettre de d'Alembert à Cramer, 48.13 Bibliothèque de Genève, 25 décembre 1748

¹⁰ Lettre de d'Alembert à Rochefort d'Ally, 81.43 Collections Particulières, 3 août 1781

¹¹ Lettre de d'Alembert à Cramer, 49.09 Bibliothèque de Genève, 21 septembre 1749

¹² Lettre de Cramer à d'Alembert, 50.03 Bibliothèque de Genève, 25 janvier 1750

¹³ Lettre de d'Alembert à Cramer, 48.07 Bibliothèque de Genève, 29 août 1748

soins, m'a couté plus qu'aucun de ceux que j'ai jamais résolus... ». En conclusion, d'Alembert n'a que fi de ces critiques et de conclure en ses termes « *je persiste toujours dans l'idée que j'en ai* », « *à bon entendeur salut* ».

4 Retour sur la controverse du jeu « Croix ou pile »

L'analyse de D'Alembert du jeu Croix ou pile, bien connu des probabilistes et des statisticiens, n'a pas échappé non plus aux critiques. Elle est aujourd'hui encore enseignée pour faire réfléchir les lycéens et étudiants sur la modélisation probabiliste et expliquer (voir démontrer) son erreur. Pourtant son analyse trouve une interprétation historique cohérente au regard de la règle de succession de Laplace (voir Gerville-Réache 2017). Son analyse nous alerte in fine sur un problème de fond : celui de l'équité d'un jeu de hasard où deux protagonistes se trouvent dans des situations asymétriques.

Précisément, dans le jeu croix ou pile, l'un (Paul) gagne si croix sort en au plus deux lancers et l'autre (Pierre) gagne si pile sort deux fois de suite. Si l'on note p la probabilité de croix, alors la probabilité de gagner de Paul est de :

$$p + (1 - p)p = 2p - p^2.$$

Mais quelle est la probabilité de croix ? Pourquoi suppose-t-on au jeu croix ou pile que les deux issues sont équiprobables ? Est-ce parce que nous n'avons aucune raison de supposer raisonnablement autre chose ou parce que l'on croit réellement que la pièce est équilibrée ?

Ce dont on peut être sûr, c'est que si la pièce est équilibrée et le lancer « neutre », alors les deux issues sont équiprobables. Mais la réciproque est fautive dans le sens où si l'on suppose que les issues sont équiprobables, ce n'est pas nécessairement parce que l'on croit que la pièce est équilibrée. On peut supposer l'équiprobabilité et croire clairement que la pièce est déséquilibrée mais que nous n'avons aucune raison de croire d'avantage en pile qu'en face. La question qui se pose à nous est alors de savoir s'il est possible de choisir entre les deux hypothèses physiques suivantes :

- 1) *La pièce est équilibrée.*
- 2) *La pièce est déséquilibrée mais nous en ignorons l'ampleur et le sens.*

La modélisation de l'hypothèse que la pièce est équilibrée et les lancers indépendants est unique. En effet on en déduit que $P(\text{Croix})=1/2$ et $P(\text{Croix})+P(\text{Pile-Croix})=3/4$. En revanche la modélisation de l'hypothèse que la pièce est déséquilibrée mais ignorant l'ampleur et le sens, est multiple. La probabilité p pourrait être modélisée par une variable aléatoire P , continue sur $[0,1]$ avec une densité symétrique par rapport à 0,5. La loi la moins informative est alors la loi uniforme sur $[0,1]$. Il s'avère qu'avec cette modélisation, on retrouve précisément les résultats de D'Alembert. A savoir que $P(\text{Croix})=1/2$ et $P(\text{Croix})+P(\text{Pile-Croix})=2/3$. Il s'avère également que cette modélisation conduit à la fameuse règle de succession de Laplace.

Mais il peut sembler que cette loi soit peu réaliste en pensant à une pièce de monnaie classique que l'on lancerait relativement haut en la faisant tourner sur elle-même rapidement et retombant sur un sol dur. On préférera alors une loi plus « informative » que la loi uniforme mais pas autant que la loi qui découlerait d'une pièce parfaitement équilibrée. Soit, mais laquelle ?

Quelques pistes sont envisageables parmi les lois de probabilités continues, symétriques en 0,5 et nulle en 0 et en 1. Mais la famille de lois de *Bates* est une piste vraisemblablement incontournable. C'est une famille de loi qui ne dépend que d'un paramètre n (c'est la loi de la moyenne de n variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$):

$$f(x; n) = \begin{cases} \frac{n^n}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^{n-1} & \text{pour } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

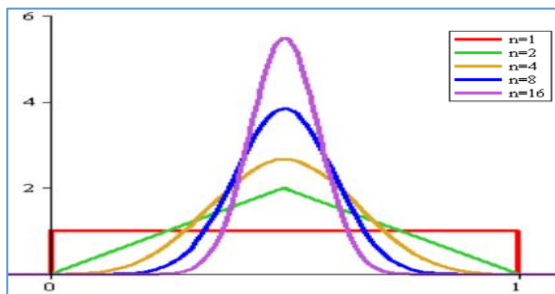
La probabilité de gagner de Paul est alors la valeur de l'espérance mathématique suivante :

$$E_n[2P - P^2] = 2E_n[P] - E_n[P]^2 - (E_n[P^2] - E_n[P]^2) = 2E_n[P] - E_n[P]^2 - V_n[P].$$

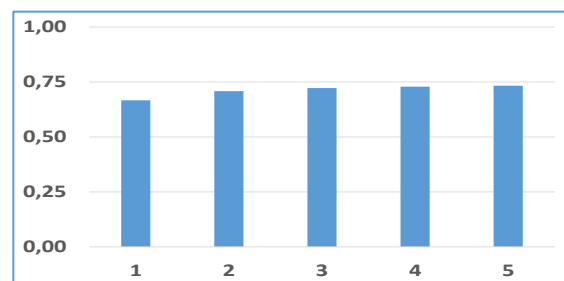
Il est établi que $V_n[P] = \frac{1}{12n}$. On obtient alors le simplissime résultat :

$$E_n[2P - P^2] = \frac{3}{4} - \frac{1}{12n}.$$

Nous voyons que la probabilité de gagner de Paul est alors comprise entre $2/3$ et $3/4$ en fonction de la modélisation retenue.



Quelques densités de Bates



Probabilités de gagner pour Paul (fonction de n)

La question qui reste en suspens est de comprendre ce que nous devons faire de cette analyse du jeu croix ou pile ? Vraisemblablement deux choses :

- 1) rester extrêmement prudent lorsqu'un propos défie nos évidences ;
- 2) éviter les jeux de hasard déséquilibrés pour lesquels plusieurs hypothèses sont physiquement rationalisables, rendant indéfinissable l'enjeu équitable.

5 Conclusion

Laissons à D'Alembert le dernier mot : « *On se plaint assez communément que les formules des mathématiques, appliquées aux objets de la nature, ne se trouvent que trop en défaut. Personne néanmoins n'avait encore aperçu ou cru apercevoir cet inconvénient dans le calcul des probabilités. J'ai osé le premier proposer des doutes sur quelques principes qui servent de base à ce calcul. De grands géomètres ont jugé ces doutes dignes d'attention; d'autres grands géomètres les ont trouvés absurdes; car pourquoi adoucerais-je les termes dont ils se sont servis? La question est de savoir s'ils ont eu tort de les employer, et en ce cas ils auraient doublement tort.* ».

6 Bibliographie

- [1] D'Alembert J. (1754), *Croix ou pile*, Encyclopédie Méthodique.
- [2] Bates, G.E., (1955), *Joint Distributions of Time Intervals for the Occurrence of Successive Accidents in a Generalized Polya Scheme*, Annals of Mathematical Statistics, 26(4), p. 705-720.
- [3] Crépel P., (2009) *D'Alembert, mathématicien des lumières*, Les Génies de la science n° 39.
- [4] Gerville-Réache L., (2017) *La loi du «croix ou pile» de D'Alembert*, Prix Tangente 2016, Tangente n°175, 3p.
- [5] Parzys B., (2007) *Expérience aléatoire et simulation : le jeu croix ou pile*, IREM. n° 66.
- [6] Passeron I. (2009) *Inventaire analytique de la correspondance de D'Alembert (1741-1783)*, avec la collaboration de Chouillet A-M. et Candaux J-D., Paris, CNRS-Éditions, 2009, 631 p.
- [7] Paty M. (1988) *D'Alembert et les probabilités*, Blanchard, Paris, p. 203-265.