Déconvolution de variables aléatoires par mollification

Pierre Maréchal [1] & Léopold Simar [2] & Anne Vanhems [3]

[1] *Université Paul Sabatier, Toulouse, pr.marechal@gmail.com*
[2] *Institut ISBA, Université Catholique de Louvain La Neuve, leopold.simar@uclouvain.be*
[3] *Université de Toulouse, Toulouse Business School et Toulouse School of Economics, a.vanhems@tbs-education.fr*

Résumé. L'objectif de ce travail est de proposer une approche alternative aux méthodes de régularisation standard pour les problèmes de déconvolution. Nous considérons l'équation suivante: $Y = X + \epsilon$ et nous voulons retrouver la fonction de densité de X à partir de l'échantillon aléatoire observé $(Y_1, ...Y_n)$. Dans ce contexte, nous supposerons que ϵ a une densité connue. Ce problème est bien connu pour être mal posé. Sa résolution a été abordée dans de nombreuses publications, dont par exemple l'approche du noyau de déconvolution ou la régularisation de Tikhonov. Le principal inconvénient de cette dernière approche est que l'équation initiale est perturbée de manière significative, ce qui conduit à un compromis difficile: un paramètre de régularisation fort induit une forte perturbation du modèle (Charybde); Un paramètre de régularisation faible donne une solution instable (Scylla). Dans cet article, nous proposons un autre schéma de régularisation, dans lequel ce compromis deviendra beaucoup moins crucial. La méthodologie correspondante fait appel à la notion de mollification.

Mots-clés. Déconvolution, Mal-position, Mollification.

Abstract. The objective of this work is to propose an alternative approach to standard regularization methods for deconvolution problems. We consider the following equation: $Y = X + \epsilon$ and we want to recover the density function of X from the observed random sample $(Y_1, \ldots, Y_n)$. In this setting, we will assume that ϵ has a known density. This problem is well-known to be ill-posed. Its resolution has been addressed in many publications, among which the deconvolution kernel approach and the Tikhonov approach. The main drawback of the latter approach is that the original equation is significantly perturbed, which leads to a difficult tradeoff: a strong regularization parameter induces a strong model perturbation (Charybdis); a weak regularization parameter yields a unstable solution (Scylla). In this paper, we propose an alternative regularization scheme, in which this tradeoff will become much less crucial. The corresponding methodology appeals to the notion of mollification.

Keywords. Deconvolution, Illposedness, Mollification.

1 Motivation et positionnement du problème

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de la déconvolution des variables aléatoires. Considérons l'équation

$$Y = X + \varepsilon,$$

dans laquelle Y est la variable aléatoire observée, X est la variable aléatoire latente, et ε est un bruit aléatoire. Nous ferons les hypothèses suivantes:

(A1) les variables X et ε sont indépendentes;

(A2) les trois variables Y, X et ε sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, et leurs densités sont notées respectivement $g_\circ$, $f_\circ$ et γ;

(A3) les densités $f_\circ$ et $g_\circ$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Nous nous intéressons principalement au cas où la densité γ est connue. Il s'agit donc du problème standard de déconvolution de variables aléatoires, dont la résolution peut être divisée en deux étapes:

(1) trouver une estimation g de $g_\circ$ à partir de l'échantillon statistique disponible;

(2) résoudre l'équation $g = \gamma * f$.

L'étape 1 peut être effectuée au moyen de méthodes classiques, telles l'estimation par noyaux ou le maximum de vraisemblance. Nous nous concentrons donc sur l'étape 2, qui est un problème mal posé.

La résolution de l'équation $g = \gamma * f$ a été l'objet de nombreux travaux. Citons par exemple

- l'approche noyaux de déconvolution, qui trouve son origine dans Stefanski et Carroll (1990), et s'est raffinée au fil des deux décénies suivantes;

- l'approche spectrale de Florens et Carrasco (2007).

Dans la première approche, la résolution s'effectue dans le domaine de Fourier. En notant $\hat{f}$ la transformée de Fourier d'une fonction f, la déconvolution s'exprime par division de $\hat{g}$ par $\hat{\gamma}$, mais cette opération étant source d'instabilité, le résultat de la division est multiplié par une fonction permettant l'application stable de la transformation de Fourier inverse. Du point de vue de la densité inconue, tout se passe comme si l'on reconstruisait une version convoluée de celle-ci, le noyau de convolution étant la transformée de Fourier inverse de la fonction d'amortissement.

La deuxième approche aborde le problème de déconvolution sous l'angle de la théorie de la régularisation des problèmes mal-posés. La régularisation de Tikhonov est proposée pour stabiliser le problème, qui s'analyse en termes d'opérateurs compact.

Notre travail hérite des deux approches citées. Il s'inscrit dans la théorie de la régulatrisation des problèmes inverses mal-posés, mais conserve de l'approche par noyaux de déconvolution l'idée que la densité reconstruite devrait être une version convoluée de la densité vraie.

2 Objectifs de notre travail

Notre attention se concentrera sur une famille de méthodes qui trouve son origine dans les problèmes inverses d'imagerie, et qui donne une place particulière à la notion de résolution: la *mollification*. Cette approche possède quelques similarités avec la célèbre régularisation de Tikhonov, mais s'en éloigne toutefois en ce qu'elle définit une relation préalable claire entre l'objet inconnu et celui qui est visé lors de la reconstruction. Un problème inverse est en général mal posé si le modèle liant l'objet inconnu aux données n'est pas suffisamment riche pour permettre une reconstruction stable. La toute première étape dans la construction d'une méthode de régularisation devrait être, en conséquence, la spécification d'un objectif plus modeste. De nombreuses méthodes se concentrent toutefois sur l'enrichissement du modèle par de l'information a priori (dont on peut questionner la légitimité), ou bien la perturbation du modèle initial, ce qui, à l'instar de la régularisation de Tikhonov, n'est pas toujours satisfaisant. L'utilisation de *mollifiers*, pour spécifier au préalable un nouvel objectif, plus modeste, remonte à la fin des années 80 et au début des années 90 (voir les articles de Lannes, Roques et Casanove 1987 et de Louis et Maass 1990). Un modèle altéré, mais stable, peut alors être construit en accord avec le nouvel objectif. Le terme de *mollification* a quelques fois été utilisé dans ce contexte, pour englober les approches de Lannes et al. d'un côté et celle de Louis et Maass de l'autre.

Jusqu'à un passé récent, les deux approches citées de la mollification étaient confinées à des problèmes particuliers et uniquement dans un cadre purement déterministe. Par exemple, les *inverses approchés* de Louis et Maass nécessite le calcul explicite de l'inverse d'un opérateur linéaire (l'adjoint de l'opérateur de l'équation linéaire mal-posée). En ce qui concerne l'approche variationnelle initiée par Lannes et al, elle nécessite le calcul de la solution d'une équation d'entrelacement entre opérateurs, calcul parfois explicite (pour les problèmes de déconvolution ou de tomographie par exemple), mais qui échappe au calcul explicite dans le cas général. Or, des contributions récentes dans ce domaine (voir en particulier Bonnefond et Maréchal 2009) offrent de nouvelles perspectives très encourageantes pour le calcul explicite de telles solutions. Ces perspectives, fondées sur l'application stable d'opérateurs non bornés, laissent espérer un progrès notable dans la théorie des problèmes inverses, à la fois dans le cadre déterministe où la mollification a été de prime abord analysée, et plus généralement dans un cadre stochastique et en particulier dans les problèmes de déconvolution qui forment l'objet de cette étude.

3 Regularisation par mollification

Nous allons dans cette section formaliser la méthode de régularisation par mollification dans le cadre stochastique de la déconvolution de variables aléatoires.

Considérons tout d'abord une version convoluée de la fonction d'intérêt:

$$C_\beta f_\circ = \varphi_\beta * f_\circ,$$

où φ_β est une *approximation de l'unité*. Plus précisément, nous considérons une fonction φ intégrable telle que:

$$\varphi_\beta(x) = \frac{1}{\beta}\varphi\left(\frac{x}{\beta}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La théorie de l'approximation nous permet de démontrer que: si $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, \infty)$, alors $\varphi_\beta * f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$ lorsque $\beta \downarrow 0$.

Notre objectif est d'étudier une version convoluée de la solution f de l'équation linéaire $T_\gamma f = g$ où l'opérateur T_γ est l'opérateur de convolution défini par $T_\gamma f = \gamma * f$.

Considérons la décomposition suivante:

$$f_\circ = C_\beta f_\circ + (I - C_\beta) f_\circ.$$

La composante indésirable est $(I - C_\beta) f_\circ$ ce qui permet de définir le terme de pénalité de la fonction objectif à minimiser: $\mathscr{R}(f) := \|(I - C_\beta)f\|^2$.

Il reste donc à définir le terme d'ajustement de la fonction objectif, et dans ce but nous allons nous intéresser à l'équation dont la solution est définie par $C_\beta f_\circ$. Comme les opérateurs de convolution commutent dans $L^2(\mathbb{R})$, de l' équation de départ $g_\circ = T_\gamma f_\circ$ on peut en déduire que:

$$C_\beta g_\circ = C_\beta T_\gamma f_\circ = T_\gamma C_\beta f_\circ.$$

Ainsi le terme d'ajustement $\mathscr{D}(T_\gamma f, C_\beta g)$ est défini par:

$$\mathscr{D}(T_\gamma f, \Phi_\beta(g)) = \|T_\gamma f - C_\beta g\|^2 .$$

En résumé, la régularisation par mollification consiste à étudier la densité f_β solution de

$$\mathrm{Min}_{f \in L^2(\mathbb{R})} \quad \left\|C_\beta g - T_\gamma f\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|(I - C_\beta) f\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \tag{1}$$

ou encore, de manière équivalente,

$$f_\beta := \left(T_\gamma^* T_\gamma + (I - C_\beta)^*(I - C_\beta)\right)^{-1} T_\gamma^* C_\beta g.$$

Notons que, comme T_γ est injective, $T_\gamma^* T_\gamma$ est définie positive tout comme $T_\gamma^* T_\gamma + (I - C_\beta)^*(I - C_\beta)$. Cela montre que le programme (1) a une unique solution.

Le paramètre β joue le rôle du *paramètre de régularisation* et lorsque $\beta \downarrow 0$ l'opérateur de mollification C_β tend vers l'identité. Le problème limite quand $\beta \downarrow 0$ devient

$$\text{Min} \quad \|T_\gamma f - g\|^2 . \tag{2}$$

Comme T_γ est injectif, l'unique solution du problème (2) est $f^\dagger := T^\dagger g$, où $T^\dagger$ désigne le pseudo-inverse de T.

Le résultat suivant établit la convergence de notre estimateur dans l'espace $L^2(I)$ où I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Theorem 1. *Supposons que:*

- $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ *avec* $\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- $|1 - \hat{\varphi}(\xi)| \sim K\,|\xi|^s$ *quand* $\xi \to 0$ *avec* $K, s > 0$
- $g \in T_\gamma\big(L^2(I) \cap H^s(\mathbb{R})\big)$

Alors $f_\beta \to T_\gamma^\dagger g$ *fortement lorsque* $\beta \downarrow 0$

L'espace de fonctions $H^s(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev défini par:

$$H^s(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}), \int (1+\xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$$

Notons que les hypothèses sur φ sont en particulier satisfaites par les noyaux de Lévy dont la fonction caractéristique est définie par $\exp(-|\cdot|^s)$

Enfin, dans la suite de notre travail, nous comparons les performances de notre estimateur avec l'estimateur de Tikhonov et l'estimateur par noyau de déconvolution à l'aide de simulations.

Bibliographie

[1] Bonnefond, X. et Maréchal, P. (2009), A variational approach to the inversion of some compact operators, *Pacific Journal of Optimization*, 5(1), 97–110.
[2] Carrasco, M. et Florens, J.P. (2011), A spectral method for deconvolving a density, *Econometric Theory*, 27(03), 546–581.
[3] Lannes, A. et Roques, A. et Casanove, M.J. (1987), Stabilized reconstruction in signal and image processing; Part I: partial deconvolution and spectral extrapolation with limited field, *J. Mod. Opt.*, 34, 161–226.
[4] A.K. Louis, A.K. et Maass, P. (1990), A mollifer method for linear operator equations of the first kind, *Inverse Problems*, 6, 427–440.
[5] Stefanski, L.A et Carroll, R.J. (1990), Deconvolving kernel density estimators, *Statistics*, 21(2), 169–184.