Propriétés asymptotiques d'un estimateur non standard du Drift paramètre dans le modèle incluant un mouvement brownien fractionnaire

Meriem Bel Hadj Khlifa [1] & Yuliya Mishura [2] & Mounir Zili [3]

[1] *Faculty of Sciences of Monastir, Department of Mathematics, Avenue de l'Environnement, 5000, Monastir, Tunisia*
meriem.bhk@outlook.fr
[2] *01601 Ukraine Kyiv Volodymyrska 64 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Probability, Statistics and Actuarial Mathematics*
myus@univ.kiev.ua
[3] *Faculty of Sciences of Monastir, Department of Mathematics, Avenue de l'Environnement, 5000, Monastir, Tunisia*
Mounir.Zili@fsm.rnu.tn

Résumé. Nous étudions le problème de l'estimation du paramètre drift inconnu dans les équations différentielles stochastiques incluant le mouvement brownien fractionnaire, les coefficients fournissant des exigences standard d' existence–unicité. Nous considérons un cas particulier où le rapport des coefficients de drift et de diffusion n'est pas aléatoire et établissons la consistance forte de l'estimateur avec des rapports différents, à partir de nombreuses classes de fonctions standard non aléatoires. Des simulations sont fournies pour illustrer nos résultats.

Mots-clés. estimateur du paramètre, mouvement Brownien fractionnaire, consistance forte ...

Abstract. We consider a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\})$ with filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ satisfying the standard assumptions. We investigate the problem of estimation of the unknown drift parameter θ in the stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion, with the coefficients supplying standard existence–uniqueness demands. We consider a particular case when the ratio of drift and diffusion coefficients is non-random, and establish the strong consistency of the estimator with different ratios, from many classes of non-random standard functions. Simulations are provided to illustrate our results.

Keywords. Parameter estimators, fractional Brownian motion, strong consistency...

1 Introduction

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\})$ un espace probabilisé filtré. On veut estimer le paramètre drift θ de l'équations différentielles stochastiques suivante :

$$X_t = x_0 + \theta \int_0^t a(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}B_s^H, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est le mouvement Browien fractionnaire de paramètre de Hurst $\frac{1}{2} < H < 1$ et a, b sont deux fonctions mesurables sur $[0, T] \times \mathbb{R}_+$. On va étudier la consistance forte des estimateurs, standard et non standard, du paramètre θ. On va présenter aussi des exemples dans le cas particulier où le rapport des coefficients a et b est non aléatoire.

2 Construction d'estimation du drift paramètre

2.1 Estimation Standard : Maximum de vraissemblance

(A_1) Condition de croissance linéaire : $\forall\ s \in [0, T]$ *et* $x \in \mathbb{R}$, $\quad |a(s, x)| + |b(s, x)| \leq K(1 + |x|)$
(A_2) $b(t, x)$ differentiable en x et $\exists\ \beta \in]1 - H, 1[$; $\forall\ s, t \in [0, T]$ *et* $x \in \mathbb{R}$,

$$|a(s, x) - a(t, x)| + |b(s, x) - b(t, x)| + |\partial_x b(s, x) - \partial_x b(t, x)| \leq K|s - t|^\beta$$

(A_3) Condition Lipschitzienne : $\forall\ t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}$;
$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$

(A_4) $\exists \rho \in]\frac{3}{2} - H, 1[$; $\forall t \in [0, T]$ et $x, y \in \mathbb{R}$, $|\partial_x b(t, x) - \partial_x b(t, y)| \leq D|x - y|^\rho$

Sous les conditions $(A_1) - (A_4)$, $\forall\ t \in [0, T]$ et pour $\alpha > 1 - H$, l'éxistence et l'unicité de X ont été prouvé dans [**?**].

On suppose que :

(B_1) $\forall\ t \in [0, T]$, $b(t, X_t) \neq 0$ et $\frac{a(t,X_t)}{b(t,X_t)}$ est p.s Lebesgue intégrable sur $[0, T]$.
On note $\psi(t, x) = \frac{a(t,x)}{b(t,x)}$ *et* $\varphi(t) := \psi(t, X_t)$.

On considère $J_t = \int_0^t l_H(t, s)\varphi(s)\mathrm{d}s$ avec $l_H(t, s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H}(t - s)^{\frac{1}{2}-H} 1_{0<s<t}$ et $c_H = \left(\frac{\Gamma(3-2H)}{2H\Gamma(\frac{3}{2}-H)^3\Gamma(H+\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{2}}$

Soit M_t^H la martingale gaussienne de Molchan [**?**] définit par :

$$M_t^H = \int_0^t l_H(t, s)\mathrm{d}B_s^H$$

telque $\langle M^H \rangle_t = t^{2-2H}$. On considère : $Y_t = \int_0^t b^{-1}(s, X_s)\mathrm{d}X_s = \theta \int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s + B_t^H$,
$Z_t = \int_0^t l_H(t, s)\mathrm{d}Y_s = \theta J_t + M_t^H$ et $\chi(t) = (2 - 2H)^{-1}J'(t)t^{2H-1}$

Et donc :

$$Z_t = (2-2H)\theta \int_0^t \chi(s) s^{1-2H} \mathrm{d}s + M_t^H = \theta \int_0^t \chi_s \mathrm{d}\langle M^H \rangle_s + M_t^H$$

Proposition 1 *Soit $\psi(t,x) \in C^1(\mathbb{R}_+) \times C^2(\mathbb{R})$ et les conditions (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) et (B_1) sont vérifiées et si de plus on a :*
$(B_2) \mathbb{E}\mathrm{I}_T := \mathbb{E} \int_0^T \chi_s^2 \mathrm{d}\langle M^H \rangle_s < \infty, \ \forall T > 0,$
$(B_3) \mathbb{E}\mathrm{I}_\infty := \int_0^\infty \chi_s^2 \mathrm{d}\langle M^H \rangle_s = \infty \ p.s$
Alors :

$$\theta_T^{(1)} = \frac{\int_0^T \chi_s \mathrm{d}Z_s}{\int_0^T \chi_s^2 \mathrm{d}\langle M^H \rangle_s} = \theta + \frac{\int_0^T \chi_s \mathrm{d}M_s^H}{\int_0^T \chi_s^2 \mathrm{d}\langle M^H \rangle_s}$$

est fortement consistent quand $T \longrightarrow +\infty$.

Pour montrer cette proposition il suffit de montrer que

$$\frac{\int_0^T \chi_s \mathrm{d}M_s^H}{\int_0^T \chi_s^2 \mathrm{d}\langle M^H \rangle_s} \longrightarrow 0 \ p.s \ quand \ T \longrightarrow \infty$$

2.2 Estimation non standard

L'estimation standard n'est pas toujours valable, mais par contre on peut utiliser l'estimation non standard.
On considère l'estimateur suivant:

$$\theta_T^{(2)} = \frac{\int_0^T \varphi_s \mathrm{d}Y_s}{\int_0^T \varphi_s^2 \mathrm{d}s} = \theta + \frac{\int_0^T \varphi_s \mathrm{d}B_s^H}{\int_0^T \varphi_s^2 \mathrm{d}s}$$

Theorem 1 *Si les conditions (A_1), (A_2), (A_3), (A_4), (B_1) et (B_2) sont vérifiées et si de plus on a :*
(B_4) $\exists \ \alpha > 1 - H$ *et* $p > 1$;

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{T^{H+\alpha-1} (\log T)^p \int_0^T |(\mathcal{D}_{0+}^\alpha \varphi)(x)| \mathrm{d}x}{\int_0^T \varphi^2(x) \mathrm{d}x} = 0 \ p.s$$

Alors $\theta_T^{(2)}$ est bien définit et fortement consistant quand $T \longrightarrow \infty$.

Bibliographie

[1] Bel Hadj Khlifa M., Mishura Y., Zili M. (2016) Asymptotic properties of non standard Drift parameter estimators in the models involving fractional Brownian Motion.
[2] Kozachenko Y., Melnikov A., Mishura Y. (2015) On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics Volume 49, Issue 1.
[3] Mishura Y. (2008) Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes.

Berlin: Springer.
[4] Nualart, D., Rascanu, A. (2002): Differential equation driven by fractional Brownian motion. Collect. Math., 53, 55–81.
[5] Norros, I., Valkeila, E., Virtamo, J. (1999) An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions Bernoulli 5(4) , 571-587.
[6] Samko, S., Kilbas, A., Marichev, O. (1993): Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, New York.
[7] Zähle, M. (1998): Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I. Prob. Theory Rel. Fields 111, 333-374.
[8] Zähle, M. (1999): On the link between fractional and stochastic calculus. In: Stochastic dynamics, (Bremen, 1997), 305-325.