Une famille paramétrique de lois de branchements multi-types

Amel Ouaari [1] & Rachid Senoussi [2]

[1] *amel.ouaari@inra.fr*
[2] *rachid.senoussi@inra.fr*

[1,2] *Biostatistique et Processus Spatiaux (BioSP), INRA, Site Agroparc,84914 Avignon, France.*

Résumé. On présente une famille paramétrique de lois associée à un processus de branchement multi-types en temps continu et homogène en temps. Par sa simplicité et la pertinence du paramétrage cette famille s'avère bien adaptée à la description de systèmes dynamiques de branchements de populations en interaction. Les différents calculs et propriétés concernant les lois de probabilité utilisent les fonctions génératrices correspondantes et se rapportent dans ce travail à la résolution de certaines équations aux dérivées partielles linéaires.

Mots-clés. processus de branchements multi-types, fonctions génératrices, équations aux dérivées partielles linéaires.

Abstract. We present a parametric family of probability distributions associated with a particular homogeneous multitype branching process in continuous time. With its simplicity and the relevance of the parameterization, this family is well adapted to describe branching dynamical systems of populations in interaction. Calculations and mathematical properties concerning probability distributions use the corresponding properties of generating functions and finally relate to solving linear partial differential équations.

Keywords. multi-types continuous time branching process, generating functions, linear partial differential equations.

1 Introduction

Un processus de branchements multi-types est un modèle mathématique qui décrit la croissance d'une population subdivisée en un nombre fini de classes d'individus. Chaque individu évolue au cours du temps indépendamment de tous les autres et de son âge, au bout d'un laps de temps aléatoire (propre à sa classe) il meurt ou il se reproduit en plusieurs individus répartis dans les différentes classes. L'indépendance et l'équidistribution au sein d'une même classe est une hypothèse fondamentale pour le développement d'outils mathématiques adéquats à l'étude des processus de branchements.

Les processus de branchements multi-types sont considérés comme des modèles stochastiques très appropriés pour décrire des systèmes dynamiques de populations en interaction. Ils jouissent d'un large éventail d'applications qui recouvrent des domaines aussi variés que la biologie (voir [7, 9, 6]), l'épidémiologie, la démographie mais aussi la chimie et la physique des particules.

Notations et rappels

K désignera le nombre de populations en interaction et $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \cdots, X_K(t)) \in \mathbb{N}^K$ les tailles de ces populations à l'instant t.

Pour $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_K) \in \mathbb{N}^K$, et $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_K) \in D(0,1)^K$ et où $D(0,1)$ est un disque fermé complexe, on écrira $\mathbf{z}^{\mathbf{i}} = z_1^{i_1} \times \cdots \times z_K^{i_K}$.
Les vecteurs $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)$ et $\mathbf{e}_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, le $k^{\text{ième}}$ vecteur canonique, seront aussi d'utilisation constante.

Par ailleurs, en théorie des processus de branchements multi-types, il est usuel de considérer les fonctions génératrices de la loi du processus $\mathbf{X}(t)$ lorsque le processus démarre avec un seul individu de type k (voir [1, 3, 8]), ie

$$G_k(t, \mathbf{z}) = E(\mathbf{z}^{\mathbf{X}(t)} / \mathbf{X}(0) = \mathbf{e}_k), \; k = 1, \cdots, K$$

et d'écrire $\mathbf{G}(t, \mathbf{z}) = (G_1(t, \mathbf{z}), \cdots, G_K(t, \mathbf{z}))$. Rappelons aussi que les dérivées partielles de la fonction génératrice $G(\mathbf{z})$ d'une variable $\mathbf{X}$ dans $\mathbb{N}^K$ déterminent entièrement sa loi de probabilité par la formule : $\partial^{i_1 \cdots i_K}_{z_1^{i_1} \cdots z_K^{i_K}} G(\mathbf{0}) = i_1! \cdots i_K! P(\mathbf{X} = \boldsymbol{i})$
La transposée d'une matrice ou vecteur V sera notée V^T.

2 Équations pour les branchements multi-types

L'équation de Chapman-Kolmogorov pour les probabilités de transition $(P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(t))$ d'un processus de branchements multi-types et homogène

$$\frac{\partial P_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(t)}{\partial t} = \sum_{m \in \mathbb{N}^K} Q_{\mathbf{i},\mathbf{m}} P_{\mathbf{m},\mathbf{j}}(t)$$

via le générateur infinitésimal $\mathbf{Q} = (Q_{\mathbf{i},\mathbf{m}})$, traduit fondamentalement la propriété de semi-groupe suivante: $\mathbf{G}(t+s, \mathbf{z}) = \mathbf{G}(t, \mathbf{G}(s, \mathbf{z}))$ $s, t \geqslant 0$ et $\mathbf{z} \in D(0,1)^K$.

Ainsi pour tout $k = 1, \cdots, K$, on a d'une part l'égalité

$$V_k(\mathbf{z}) = \partial_t G_k(0, \mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^K} Q_{\mathbf{e}_k, \mathbf{m}} \mathbf{z}^{\mathbf{m}},$$

et d'autre part $G_k(t, \mathbf{z})$ satisfait l'EDP avec la condition initiale:

$$\begin{cases} \partial_t G_k(t,\mathbf{z}) & = & -\sum_{l=1}^{K} V_l(\mathbf{z})\partial_{z_l} G_k(t,\mathbf{z}) \\ G(0,\mathbf{z}) & = & z_k. \end{cases} \tag{1}$$

En réalité, ces $K - EDP$ à $(K+1)$ - variables se réduisent à la résolution d'une seule EDP pour une fonction scalaire $G(t,z)$ mais avec des conditions initiales distinctes.

La solution usuelle du système linéaire (1) consiste exhiber K intégrales premières indépendantes $\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_K$ pour déduire que toute solution est de la forme $G(t,\mathbf{z}) = G_0(\mathcal{I}_1(t,\mathbf{z}),\cdots,\mathcal{I}_K(t,\mathbf{z}))$. G_0 est déterminée par la condition initiale $G(0,\mathbf{z}) = G_0(\mathbf{z})$.

Pour cela, posons $\mathbf{W}(t,\mathbf{z}) = (1, \boldsymbol{V}(\mathbf{z}))$ avec $\boldsymbol{V}^T(\mathbf{z}) = (V_1(\mathbf{z}),\cdots,V_K(\mathbf{z}))$ et $D = (\partial_t, \partial_{z_1},\cdots,\partial_{z_K})$ et remarquons que l'équation (1) s'écrit:

$$\partial_{\mathbf{W}} G(t,\mathbf{z}) = \langle \mathbf{W}, DG(t,\mathbf{z})\rangle \equiv 0, \tag{2}$$

signifiant par là que $G(t,\mathbf{z})$ est constante le long des trajectoires $(t,\boldsymbol{Z}(t))$ du système différentiel autonome K-dimensionnel :

$$\frac{d\boldsymbol{Z}}{dt} = \mathbf{V}(\boldsymbol{Z}(t)) \tag{3}$$

Formellement, il est facile de déterminer des intégrales premières indépendantes en remarquant simplement que par le théorème d'unicité de la solution des EDO, les coordonnées à l'origine d'une trajectoire solution sont indépendantes et ne changent pas le long d'une trajectoire!

De façon plus précise, la solution de (3), $\mathbf{Z}(t,\mathbf{z}_0) = (Z_1(t,\mathbf{z}_0),\cdots,Z_K(t,\mathbf{z}_0))$ partant de $\mathbf{z}_0$ en $t=0$, induit pour $t>0$ un difféomorphisme $\mathbf{z}_0 \to \mathbf{Z}(t,\mathbf{z}_0)$ et les K composantes de son réciproque $\mathbf{z} \to \mathbf{Z}^{-1}(t,\mathbf{z}) = \mathbf{z}_0(t,\mathbf{z})$ sont des intégrales premières indépendantes. On notera donc $\mathbf{Z}^{-1}(t,\mathbf{z}) = \mathcal{I}(t,\mathbf{z}) = (\mathcal{I}_1(t,\mathbf{z}),\cdots,\mathcal{I}_K(t,\mathbf{z}))$.

Clairement $\mathcal{I}(t,\mathbf{z})$ vérifie l'EDO autonome du flux réciproque, càd:

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = -\mathbf{V}(\mathcal{I}(t)). \tag{4}$$

avec la condition initiale $\mathcal{I}(0,\mathbf{z}) = \mathbf{z}$.

Cette dernière condition initiale prouve en fait que non seulement $\mathbf{G}(t,\mathbf{z}) = \mathcal{I}(t,\mathbf{z})$ mais que toute solution scalaire $G(t,\mathbf{z})$ de (1) avec la condition initiale $G(0,\mathbf{z}) = G_0(\mathbf{z})$ aura la forme $G(t,\mathbf{z}) = G_0(\mathcal{I}(t,\mathbf{z}))$. nous pouvons écrire $\mathbf{G}(t,\mathbf{z}_0) = (\boldsymbol{Z}_t^{-1}(\mathbf{z}_0))_i$

3 Famille paramétrique de loi de branchements multi-types

Nous considérerons un cas particulier à la fois "traitable" mais aussi très utile pour des applications étudiant le développement de populations en interaction, d'équation générale:

$$\partial_t G(t, \mathbf{z}) + \sum_{j=0}^{K} V_j(\mathbf{z}) \partial_{\mathbf{z}_j} G(t, \mathbf{z}) = 0, \qquad \mathbf{z} = (z_0, z_1, \cdots, z_K)$$

.

Il s'agit d'un modèle à $K+1$ populations où la première population notée de type "0" jouera le rôle spécial de population de *mères*, comme par exemples des cellules souches qui se reproduisent/meurent de façon indifférenciée dans un premier temps. Cette classe "donneuse" évolue de façon autonome par rapport aux autres avec une dynamique simple de reproduction quadratique, càd

$$V_0(\mathbf{z}) = -\mu_0 + (\mu_0 + \lambda_0) z_0 - \lambda_0 z_0^2.$$

Par contre, cette classe "0" fournit "linéairement" les K autres classes. Ces dernières interagissant aussi de façon linéaire entre elles, autrement dit,

$$\begin{cases} V_1(\mathbf{z}) = -\mu_1 - \lambda_{1,0} z_0 + (\mu_1 + \lambda_{1,0} + \cdots + \lambda_{1,K}) z_1 - \lambda_{1,2} z_2 - \cdots - \lambda_{1,K} z_K \\ \vdots \\ V_K(\mathbf{z}) = -\mu_K - \lambda_{K,0} z_0 - \lambda_{K,1} z_1 - \cdots - \lambda_{K,K-1} z_{K-1} + (\mu_K + \lambda_{K,0} + \cdots + \lambda_{K,K-1}) z_K \end{cases}$$

Il est facile d'établir explicitement les lois de probabilité de $\mathbf{X}_0(t)$ (d'un branchements quadratique $1.D$) à partir de la solution elle aussi explicite de l'EDO pour $Z_0(t)$ (resp. $\mathcal{I}_0(t)$).
La solution $\mathcal{I}_0(t)$ est la génératrice d'une loi géométrique alourdie en "0".
Partant de $X_0(0) = n$, on obtient

- pour $\mu = \lambda$: $\quad G(t, z) = \left(\frac{\lambda t - (\lambda t - 1) z}{1 + \lambda t - \lambda t z} \right)^n$
- pour $\mu \neq \lambda$: $\quad G(t, z) = \left(\frac{\mu(e^{\delta t} - 1) - (\mu e^{\delta t} - \lambda) z}{\lambda e^{\delta t} - \mu - (\mu e^{\delta t} - \lambda) z} \right)^n, \quad (\delta = \lambda - \mu)$

Les autres composantes $\quad (\mathcal{I}_1(t), \cdots, \mathcal{I}_K(t)) = \mathcal{I}^T(t) \quad$ satisfont l'équation différentielle linéaire non homogène:

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = A\mathcal{I} + \nu_0(t)$$

où $\quad \nu_0^T(t) = -(\lambda_{10}\mathcal{I}_0(t)+\mu_1, \cdots, \lambda_{K0}\mathcal{I}_0(t)+\mu_K)$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu_1+\Lambda_1) & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,K} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{K,1} & \cdots & \lambda_{K,K-1} & -(\mu_K+\Lambda_K) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{K} \lambda_{ji}$$

La solution générale de cette dernière équation est classique. Elle est de la forme

$$\mathcal{I}(t) = e^{At}\left(\mathcal{I}(0) + \int_0^t e^{-A\,s}\nu_{\mathbf{0}}(s)ds\right) \tag{5}$$

La solution finale passe donc par la décomposition de A en blocs de Jordan et permet de révéler et de paramétrer différents types d'interactions.
Ainsi, $\quad J = PAP^{-1} \Longleftrightarrow A = P^{-1}JP,\quad$ permet d'écrire $\quad e^{-A\,s} = P^{-1}e^{-J\,s}P.$
La matrice J est diagonale par blocs. Il suffira alors de résoudre séparément le problème pour chaque bloc de Jordan, en prenant $\tilde{\mathcal{I}}(t) = P\mathcal{I}(t)$, qui vérifie $d\tilde{\mathcal{I}}(t) = J\tilde{\mathcal{I}}(t) + \tilde{\nu_0}(t)$, avec $\tilde{\nu_0}(t) = P\nu_0(t)$
A chaque valeur propre $\quad\alpha$ de A qui peut être associé à un ou plusieurs blocs de Jordan J de taille m s'écrit sous la forme suivante

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha\mathbb{I} + \mathbb{E}$$

telle que $\mathbb{E}$ est nilpotente $E^h = 0,\quad$ si $h > m-1$ d'où $e^{-J\,s} = e^{-\,s}H(-s)$

avec $H(s) = e^{\mathbb{E}\,s} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{s^j\mathbb{E}^j}{j!} = \begin{pmatrix} 0 & s & \frac{s^2}{2!} & \cdots & \frac{s^{m-1}}{m-1!} \\ \vdots & 0 & s & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{s^2}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & s \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarquons que pour une valeur propre $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, on peux écrire

$$e^{-J\,s} = e^{-\alpha_1\,s}(\cos(\alpha_2\,s) + i\sin(\alpha_2\,s))H(-s)$$

et amène à des comportements périodiques explosifs ou bien d'extinction.
au final pour un bloc J de type donné, la solution de l'intégrale vectorielle

$$\tilde{\mathcal{I}}(t) = e^{Jt}\left(\tilde{\mathcal{I}}(0) + \int_0^t e^{-J\,s}\tilde{\nu_{\mathbf{0}}}(s)ds\right) \tag{6}$$

Partant de $X_0(0) = 1$ et pour $\mu = \lambda$,par exemple càd $\tilde{\mathcal{I}}(0) = \frac{Ct+z}{Ct+1}$ passe par l'intégration des fonctions de type

$$\int_0^t e^{-\alpha_1\, s} \cos(s\alpha_2) s^j \left(\frac{Ct+z}{Ct+1}\right) \text{ ou similaires.}$$

Des exemples particuliers dans les cas $m = 2, 3$ illustreront cette approche.

References

[1] Krishna B Athreya and Peter E Ney. *Branching processes*, volume 196. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Krishna Balasundaram Athreya. Some results on multitype continuous time markov branching processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(2):347–357, 1968.

[3] Theodore E Harris. *The theory of branching processes.* Courier Corporation, 2002.

[4] Anatole Joffe and Frank Spitzer. On multitype branching processes with 1. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 19(3):409–430, 1967.

[5] Charles J Mode. *Multitype branching processes: theory and applications*, volume 34. American Elsevier Pub. Co., 1971.

[6] Charles J Mode, M Kimmel, and DE Axelrod. Branching processes in biology, 2003.

[7] Anthony G Pakes. Ch. 18. biological applications of branching processes. *Handbook of statistics*, 21:693–773, 2003.

[8] Boris Alexandrovich Sevast'yanov. The theory of branching random processes. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 6(6):47–99, 1951.

[9] Xiaowei Wu. *Branching processes with biological applications.* PhD thesis, Rice University, 2010.