

FRACTIONAL AUTOREGRESSIVE SPATIAL PROCESSES : MONTE CARLO INVESTIGATION

Ahmed BENSALMA¹

¹ *Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée (ENSSEA)
Pôle Universitaire de Koléa, Algérie
Bensalma.ahmed@gmail.com*

Résumé. Il existe dans la littérature une classe de modèles connu sous le nom FISSAR (Fractionnally Integrated Separable Spatial AutoRegressive model). Dans cet article, pour un cas particulier de cette classe de modèles, des simulations seront menées, pour explorer les différentes représentations graphiques qui peuvent être déduites de tels modèles. Sur les données simulées la méthode du maximum de vraisemblance sera utilisée pour estimer les paramètres d'intégration fractionnaire.

Mots-clés. Modèle autorégressif spatial, processus séparable, Modèle FISSAR, Mémoire longue, Processus stationnaire spatial.

Abstract. There exists in the literature a class of models known as FISSAR (Fractionally Integrated Separable Spatial AutoRegressive model). In this article, for a particular case of this class of models, simulations will be carried out, to explore the different graphic representations that can be deduced from such models. On the simulated data, the maximum likelihood method will be used to estimate the fractional integration parameters.

Keywords. Spatial autoregressive model, separable process, FISSAR model, long memory, spatial stationary process.

1 Introduction

Les études sur les données spatiales ont montrés la présence de structures de corrélation de long terme (Kim et al. 2002). Pour tenir compte de cette caractéristique spécifique, Boissy et al. (2005) ont étendu le concept de mémoire longue des temporelles au contexte spatial. D'abord, Martin (1979) a introduit et étudié le processus autorégressif spatio-temporel défini par :

$$X_{st} = \alpha X_{s-1,t} + \beta X_{s,t-1} + \alpha\beta X_{s-1,t-1} + \varepsilon_{ts}, \quad (1.1)$$

où $-1 < \alpha, \beta < 1$. Le modèle (1.1) peut être réécrit en utilisant les opérateurs retards,

$$(1 - \alpha L_1 - \beta L_2 - \alpha\beta L_1 L_2) X_{st} = \Phi(L_1, L_2, \alpha, \beta) X_{st} = \varepsilon_{st}, \quad (1.2)$$

où $L_1 X_{st} = X_{s-1,t}$, $L_2 X_{st} = X_{s,t-1}$ et $L_1 L_2 X_{st} = X_{s-1,t-1}$. Ensuite, Boissy et al (2005) ont introduits dans le modèle (1.1) une composante mémoire longue en utilisant un opérateur binomial à intégration fractionnaire défini par,

$$(1 - L)^d = \Delta^d = (1 - L_1)^{d_1} \circ (1 - L_2)^{d_2}, \quad (1.3)$$

où $(d_1, d_2) \in (-0.5, 0.5)$ et représentent, respectivement le paramètre d'intégration fractionnaire spatial et temporel. Avec l'introduction de l'opérateur (1.3), le modèle (1.2) devient

$$\Phi(L_1, L_2, \alpha, \beta) (1 - L_1)^{d_1} \circ (1 - L_2)^{d_2} X_{st} = \varepsilon_{st}, \quad s, t \in \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

où $\varepsilon_{st} \sim BN(0, \sigma^2)$. Boissy et al (2005) ont montrés que la fonction densité spectrale de (1.4) est donnée par,

$$f(x, y, \theta) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \frac{|1-e^{-ix}|^{-2d_1} |1-e^{-iy}|^{-2d_2}}{|\Phi(e^{-ix}, e^{-iy}, \alpha, \beta)|^2}, \quad (1.5)$$

où $\theta = (\alpha, \beta, d_1, d_2)$, $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ et $|d_i| < 0.5$, $i = 1, 2$. De plus, ils montrent que la fonction d'auto-covariance, lorsque $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ est,

$$\gamma(k, l) = \sigma^2 \frac{(-1)^{k+l} \Gamma(1-2d_1) \Gamma(1-2d_2)}{\Gamma(k-d_1+1) \Gamma(1-k-d_1) \Gamma(l-d_2+1) \Gamma(1-l-d_2)}, \quad (1.6)$$

Remarque : *Il est bien connu que dans le contexte classique des processus à intégration fractionnaire (qui n'inclut pas de composante spatiale), les auto-covariances d'ordre h , $\gamma(h)$, sont donnés par,*

$$\gamma(h) = \sigma^2 \frac{\Gamma(h+d) \Gamma(1-2d)}{\Gamma(h+1-d) \Gamma(d) \Gamma(1-d)}.$$

Nous avons, pour h grand,

$$\gamma(h) = \sigma^2 h^{2d-1} \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d) \Gamma(1-d)}.$$

Cette dernière approximation est utilisée comme une définition (parmi d'autres) de la mémoire longue. Si nous avons rappelé cette définition, c'est pour dire que nous n'avons pas la possibilité de déduire une approximation similaire de (1.6).

Boissy et al. (2005) ont généralisé les résultats de Fox et Taqu (1986,1987), pour les séries temporelles aux modèles définis par (1.4). Dans la suite, Shitan (2008) a désigné le modèle (1.4) par $FISSAR(1, d_1, 0)(1, d_2, 0)$ (Fractionnally Integrated Separable Spatial AutoRegressive model) et propose une méthode de régression, inspirée de celle de Geweke et Porter Hudak (1983), pour estimer les paramètres de mémoire. Pour plus d'informations, sur ce type de modèles et ces extensions, le lecteur peut se référer aux articles de Ghodsi et Shitan (2013) et Cissé, Diongue et Guegan (2016).

En ce qui nous concerne, dans cet article, on s'intéressera à certains types de représentations graphiques de la classe $FISSAR(0, d_1, 0)(0, d_2, 0)$. Pour cela, pour différentes valeurs de d_1 et d_2 , les modèles $FISSAR(0, d_1, 0)(0, d_2, 0)$ seront simulés. Dans la section 2, les données simulées seront, exploités pour explorer pour voir la forme des autocorrélations et périodogrammes. Dans la section 3, sur les données simulées, la méthode du maximum de vraisemblance sera utilisée pour estimer les paramètres d'intégration fractionnaire.

2 Exploration graphiques des processus $FISSAR(0, d_1, 0)(0, d_2, 0)$

Pour simuler un processus $FISSAR(0, d_1, 0)(0, d_2, 0)$, on peut utiliser soit la méthode en deux étapes soit la méthode en une seule étape. Les deux méthodes nécessitent d'abord de simuler un processus bruit blanc bidimensionnel $\{\varepsilon_{st}, s = 1, \dots, S, t = 1, \dots, T\}$

La méthode en deux étapes consiste, d'abord à appliquer l'opérateur de différenciation temporel $(1 - L_2)^{d_2}$ aux S échantillons $\{\varepsilon_{st}\}$ de taille T , ce qui nous permettra d'obtenir le processus bidimensionnel $\{x_{st}, s = 1, \dots, S, t = 1, \dots, T\}$. Ensuite, l'opérateur de différenciation spatiale $(1 - L_1)^{d_1}$ sera appliqué aux T échantillons $\{x_{st}\}$ de taille S ce qui nous permettra d'obtenir le processus bidimensionnel $\{y_{st}, s = 1, \dots, S, t = 1, \dots, T\}$. Les valeurs de x_{st} et y_{st} , pour s et t donnés, s'obtiennent en utilisant respectivement les formules suivantes :

$$x_{st} = \sum_{j=1}^{t-1} \psi_j(d_2) \varepsilon_{s,t-j} \quad \text{et} \quad y_{st} = \sum_{j=1}^{s-1} \psi_j(d_1) x_{s-j,t},$$

$$\text{où } \psi_j(d_2) = \frac{\Gamma(j+d_2)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d_2)} \quad \text{et} \quad \psi_j(d_1) = \frac{\Gamma(j+d_1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d_1)}.$$

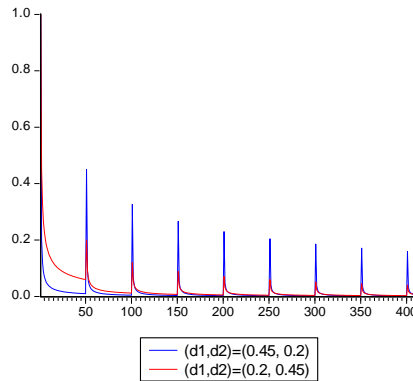
La méthode en une seule étape consiste à appliquer l'opérateur d'intégration fractionnaire binomial $(1 - L_1)^{d_1} \circ (1 - L_2)^{d_2} = (\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(d_2) L_2^j) (\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(d_1) L_1^j)$. Puisque on manipule des

échantillons de taille finis on utilisera l'opérateur tronqué suivant :

$$\left(\sum_{j=0}^{t-1} \psi_j(d_2) L_2^j\right) \left(\sum_{j=0}^{s-1} \psi_j(d_1) L_1^j\right), \text{ pour } s = 1, \dots, S \text{ et } t = 1, \dots, T. \quad (2.1)$$

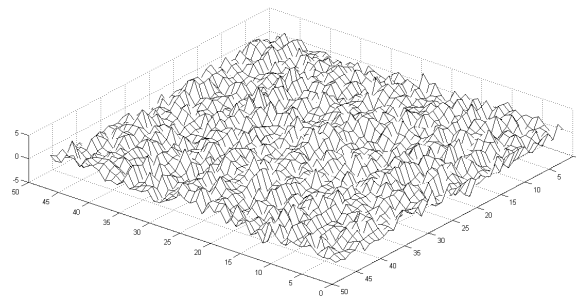
Il est intéressant de voir à quoi ressemble la représentation graphique des coefficients de (2.1). Ci-dessous nous donnons la représentation graphique des coefficients de (2.1) pour $(d_1, d_2) = (0.2, 0.45)$ et $(d_1, d_2) = (0.45, 0.2)$.

Figure 1 : Représentation graphique des coefficients du produit $\left(\sum_{j=0}^{t-1} \psi_j(d_2) L_2^j\right) \left(\sum_{j=0}^{s-1} \psi_j(d_1) L_1^j\right)$ pour $s = t = 20$.



2.1 Simulation d'un $FISSAR(0, 0.2, 0)(0, 0.45, 0)$

Figure 2 : Surface représentant les 50×50 points simulés du processus $FISSAR(0, 0.2, 0)(0, 0.45, 0)$

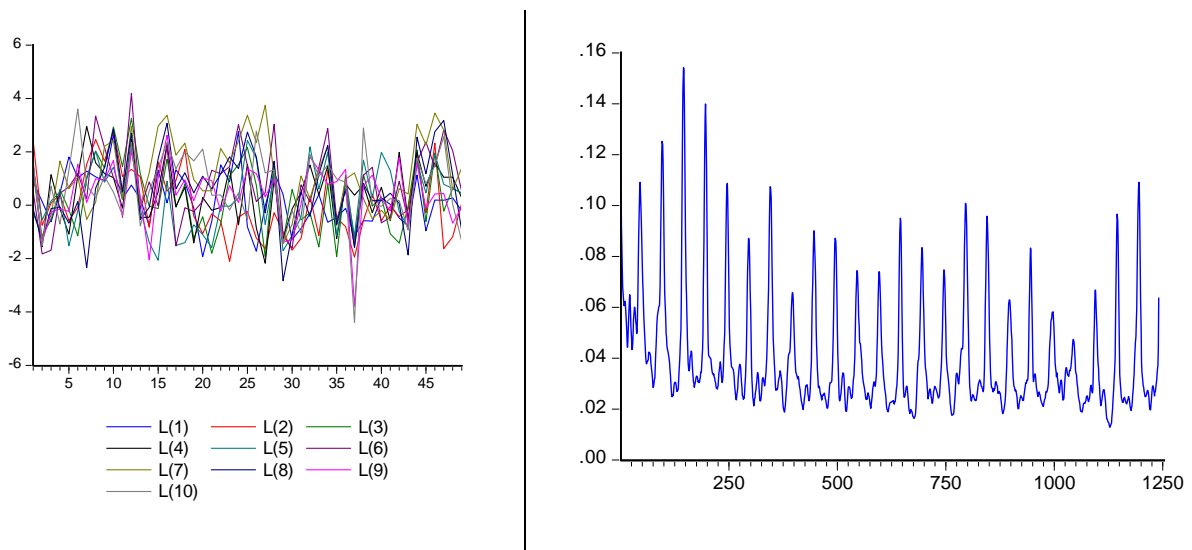


Il est difficile, à partir de la figure 2, de déceler une quelconque caractéristique du processus simulé. Mais si on considère la représentation graphique des 10 premières lignes correspondant à $s=1$ à 10 on constate que les allures des courbes sont similaires, ce qui indique l'existence d'une périodicité.

Tableau 1 : Matrice (**M**) de taille (50,50) des données simulées.

	$C(1)$...	$C(i)$...	$C(50)$
$L(1)$	$y_{1,1}$...	$y_{1,i}$...	$y_{1,50}$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
$L(i)$	$y_{i,1}$...	$y_{i,i}$...	$y_{i,50}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$L(50)$	$y_{50,1}$...	$y_{50,i}$...	$y_{50,50}$

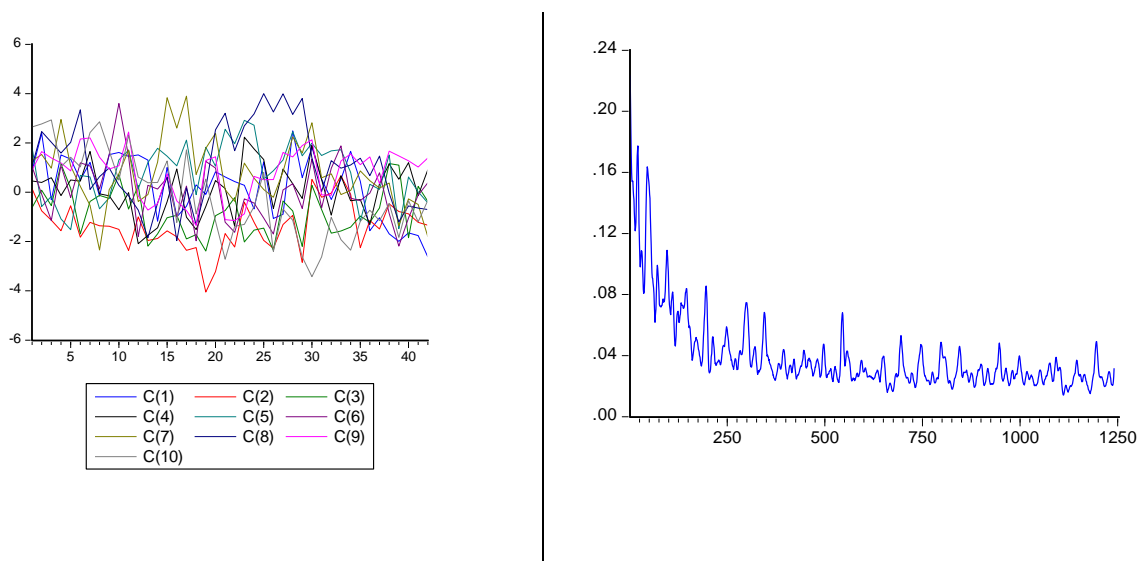
Figure 3 : Le premier graphe représente les 10 premières lignes de la matrice \mathbf{M} ; alors que le second graphe représente le périodogramme de la série $Y = \text{vec}(M)$



Soit Y la série de donnée de taille $n = 2500$ obtenue en mettant bout à bout les lignes de la matrice M . Le périodogramme de la série $Y = \text{vec}(M)$ met clairement en évidence la périodicité mise en évidence par le graphe de la figure 3. Le périodogramme ci-dessus indique l'existence d'une périodicité $p = 50$.

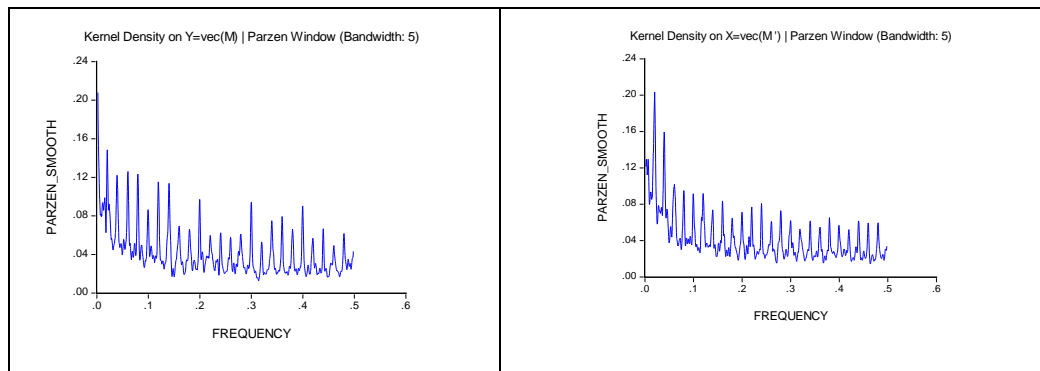
On pourrait croire que le même phénomène peut être observé si on considère la représentation graphique des 10 premières colonnes de M et le corrélogramme de la série $X = \text{vec}(M^T)$ où M^T est la matrice transposée de M . La figure 5 montre que les dix représentations graphiques des 10 premières colonnes ont des allures quelconques et elles ne sont pas similaires. Même si on insiste à voir des similarités dans leurs allures, elles ne sont aussi marquées que dans le cas de la figure 3.

Figure 5 : Le premier graphe représente les 10 premières colonnes de la matrice \mathbf{M} , et le second graphe représente le périodogramme de la série $X = \text{vec}(M^T)$



2.1 Simulation d'un $FISSAR(0, 0.4, 0)(0, 0.4, 0)$

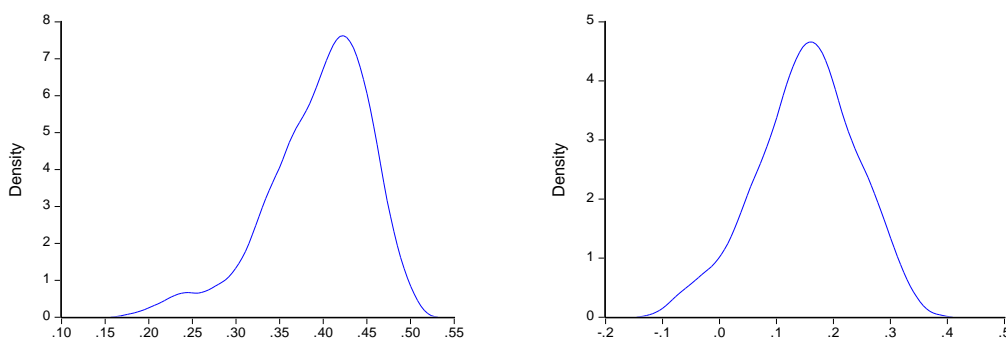
Pour le cas $(d_1, d_2) = (0.4, 0.4)$ les deux corrélogrammes ci-dessous montrent que la périodicité est très marquée pour les deux séries $Y = \text{vec}(M)$ et $X = \text{vec}(M^T)$



3 Estimation des paramètres de mémoire par la méthode du maximum de vraisemblance.

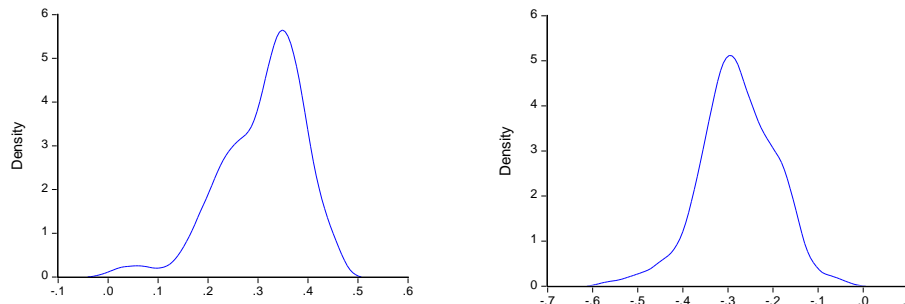
Dans cette section nous considérons une matrice M de dimension 100×100 . Pour cette matrice, nous allons estimer, par la méthode du maximum de vraisemblance exacte de Sowell (1992), l'ensemble des ordres d'intégration des lignes ainsi que l'ensemble des ordres des ordres d'intégration des colonnes. Pour ces deux ensembles, les méthodes non-paramétriques d'estimation des densités, pour représenter les 100 valeurs estimées dans chacun des cas seront utilisées.

Exemple 1 : Pour le modèle $FISSAR(0, 0.2, 0)(0, 0.45, 0)$ on obtient les estimations de densité suivantes :



L'estimation des paramètres d'intégration fractionnaire des séries $Y = \text{vec}(M)$ et $X = \text{vec}(M^T)$ donne respectivement $d_2 = 0.44$ et $d_1 = 0.16$.

Exemple 2 : Pour le modèle $FISSAR(0, -0.25, 0)(0, 0.35, 0)$ on obtient les estimations de densité suivantes :



L'estimation des paramètres d'intégration fractionnaire des séries $Y = \text{vec}(M)$ et $X = \text{vec}(M^T)$ donne respectivement $d_2 = 0.35$ et $d_1 = -0.23$.

Dans cette section nous avons réalisé des simulations succinctes afin de vérifier si la méthode du maximum de vraisemblance exacte de Sowell (1992) pouvait s'appliquer sur les différents échantillons représentés par les lignes et les différents échantillons représentés par les colonnes pour estimer respectivement d_2 et d_1 .

Bibliographie

- [1] Boissy, Y., Bhattacharya, B. B., Li, X., Richardson, G. D. (2005). Parameter estimates for fractional autoregressive spatial processes, *The Annals of Statistics* 33(6): 2553-2567.
- [2] Boissy, Y., (2001), Parametric estimates for fractional autoregressive processes, *Ph.D. dissertation. Univ. Central Florida*.
- [3] Cissé, P. O., Diongue, A. K., Guegan, D., (2016) Note on a new Seasonal Fractionally Integrated Separable Spatial utoregressive Model. *Document de travail du centre d'Economie de la Sorbonne 2013.13-ISSN :1955-611X. 2016. Halshs-01278126*.
- [4] Fox, R. and Taqqu, M. S. (1986). Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series. *Ann. Statist.* 14 517.532. MR0840512
- [5] Fox, R. and Taqqu, M. S. (1987). Central limit theorems for quadratic forms in random variables having long-range dependence. *Probab. Theory Related Fields* 74 213. 240. MR0871252
- [6] Geweke, J. and Porter-Hudak, S. (1983). The estimation and application of long memory time series models, *J. Time Ser. Anal.* 4: 221-37.
- [7] Ghodsi, A., Shitan M. (2009). Estimation of the Memory Parameters of the Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive (FISSAR (1, 1)) Model: A Simulation Study, *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 38(6): 1256-1268.
- [8] Kim et al., (2002) Temporal and spatial evolution of the Asian summer monsoon in the seasonal cycle of synoptic fields. *Journal of Climate*, 15:3630–3644.
- [9] Martin, R. J. (1979). A subclass of lattice processes applied to a problem in planar sampling. *Biometrika* 66 209.217. MR0548186
- [10] Martin, R. J. (1986). On the design of experiments under spatial correlation. *Biometrika* 73, 247.277. MR0855887.
- [11] Sowell, F. (1992), Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models, *Journal of Econometrics*, Vol. 53, pp. 165-188.