

# ESTIMATION DES DÉFORMATIONS LARGES PAR CHAMPS GAUSSIENS : APPLICATION AU RECALAGE D'IMAGES

Thomas Deregnacourt <sup>1</sup> & Chafik Samir <sup>2</sup> & Anne-Françoise Yao <sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>*LIMOS*, <sup>3</sup>*LMBP, CNRS, Université Clermont Auvergne, France*  
<sup>1</sup>*thomas.deregnacourt@isima.fr*, <sup>2</sup>*chafik.samir@uca.fr*,  
<sup>3</sup>*anne-francoise.yao@math.univ-bpclermont.fr*

**Résumé.** Le problème de déformations larges consiste à estimer la déformation globale entre une image source  $I_1$  et une image cible  $I_2$  connaissant cette déformation partiellement. Dans ce contexte, nous nous intéressons à l'estimation d'un champ de déformation  $U$  sur le domaine  $\Omega = [0, 1]^2$  de  $I_1$  sachant  $U$  sur un ensemble fini de courbes  $\beta \in \Omega$ . Pour ce faire, nous proposons une nouvelle méthode basée sur des modèles gaussiens pour recalibrer des images multimodales. La méthode proposée commence par résoudre le problème de correspondance entre les  $\beta$ s puis estime le déplacement sur tout  $\Omega$  par krigeage. La solution optimale est calculée à l'aide du maximum de vraisemblance et de l'inférence bayésienne. D'après les résultats obtenus sur des données réelles et simulées la déformation résultante a l'avantage d'être exacte sur les observations et d'être lisse sur  $\Omega$ .

**Mots-clés.** Statistique spatiale, Krigeage, Processus gaussiens, Régression bayésienne.

**Abstract.** The large deformation problem aims to estimate the global deformation between a target image  $I_1$  and a reference image  $I_2$  knowing the deformation partially. In this context, we will focus on estimating a random field  $U$  on the  $I_1$  domain  $\Omega = [0, 1]^2$  based on observations of  $U$  on a finite set of curves  $\beta \in \Omega$ . Indeed, we present a new multimodal image registration method based on Gaussian random fields. The proposed method first find the optimal correspondences between curves  $\beta$ s then estimate the deformation vector field on  $\Omega$  by Kriging. The optimal solution is computed using Maximum Likelihood and Bayesian inference. Based on results using both real and simulated data, the resulting deformation has the advantage of being exact on the observations as being sufficiently smooth over the whole  $\Omega$ .

**Keywords.** Spatial statistics, Kriging, Gaussian process, Bayesian regression.

# 1 Introduction

Le recalage d'images est une méthode qui vise à estimer la transformation entre une image source  $I_1$  vers une image cible  $I_2$  sous certaines contraintes, afin de fusionner leurs informations complémentaires. En imagerie médicale, cette méthode est requise pour détecter des maladies, valider un traitement, comparer les données du patient avec des atlas anatomiques, etc. Dans notre cas, les deux images  $I_1$  qui représente l'échographie et  $I_2$  qui représente l'IRM ont des distributions d'intensité différentes (voir Figure 1). Cette différence rend inefficace les méthodes basées sur l'information mutuelle. D'un autre coté, on peut facilement définir des caractéristiques géométriques : par exemple les contours des organes présents dans les deux images, et donc utiliser ces dernières pour effectuer le recalage.

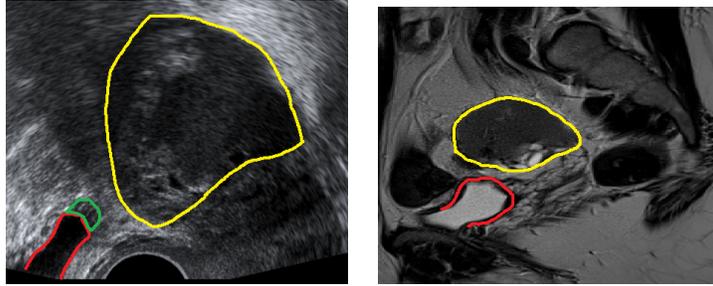


Figure 1: Deux exemples de courbes extraites manuellement d'images multimodales représentant les mêmes organes (en rouge et en jaune respectivement) : échographie à gauche et IRM à droite.

## 2 Méthodologie

### 2.1 Formulation du problème

Soient  $\Omega$  un domaine fermé de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\beta_1$  les courbes extraites de l'échographie, et  $\beta_2$  les courbes de l'IRM. Notre objectif est d'estimer le déplacement entre les deux images, ce qui revient à estimer un champ de déplacement  $U$  sur  $\Omega$  tel que  $U(\beta_1) = \beta_2 - \beta_1$ . La méthode proposée par Samir et al. (2014), nous permet d'atteindre notre premier objectif qui consiste à trouver une paramétrisation optimale pour faire correspondre les points de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Par conséquent, on note  $\{X_i, i = 1, \dots, N\}$  l'ensemble de  $N$  points représentant la discrétisation de  $\beta_1$  et  $\{U_i = U(X_i), i = 1, \dots, N\}$  les observations (déplacements) correspondantes.

Le deuxième objectif est donc de trouver  $U^* = U(X^*)$  pour une nouvelle position  $X^* \in \Omega \setminus \beta$  sous l'hypothèse que  $U$  est un champ gaussien sur  $\Omega$  :

$$U(X) \sim \mathcal{N}(\mu(X), C(X))$$

où  $\mu(X)$  et  $C(X)$  sont la moyenne et la variance de  $U(X)$ .

Nous supposons que  $\mu(X) = 0$  et nous estimerons  $C(X)$  par une méthode paramétrique. Il existe un grand choix de fonctions de covariance candidates dans la littérature (voir Stein (1999) et Adler and Taylor (2007) pour plus de détails). Dans ce travail, nous avons choisi  $C$  comme fonction de covariance de Matérn :

$$C(h) = \tau \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} (h\alpha)^\nu K_\nu(h\alpha) \quad (1)$$

où  $h$  est la corrélation spatiale et  $K$  la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. Généralement,  $\tau > 0$  est appelé le paramètre de variance (marginale),  $\alpha > 0$  le paramètre d'échelle et  $\nu > 0$  le paramètre de lissage. Si  $\nu = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{N}$ , l'équation 1 se réduit au produit d'une exponentielle et d'un polynôme (voir Gneiting et al. (2010)):

$$C(h) = \tau e^{-h\alpha} \sum_{l=0}^k \frac{(k+l)!}{(2k)!} \binom{k}{l} (2h\alpha)^{k-l}$$

Lorsque  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $C$  est la fonction de covariance exponentielle, et elle devient gaussienne pour  $\nu = +\infty$ . De manière plus générale, pour  $\nu = \frac{1}{2} + k$ , le champ  $U$  sera de classe  $C^k$ . Par conséquent, définir notre champ revient à estimer l'hyperparamètre  $\theta = (\tau, \alpha, \nu)$  de la fonction de covariance.

## 2.2 Estimation des paramètres de la fonction de covariance

### 2.2.1 Estimation par maximum de vraisemblance

Le premier estimateur considéré est obtenu par maximum de vraisemblance et sera noté  $\theta_{\text{MLE}}$ . Sachant que l'équation de maximisation de la vraisemblance n'a pas de solution analytique dans ce contexte, nous utiliserons des méthodes numériques pour déterminer des estimateurs de  $(\tau, \alpha, \nu)$ . Comme il est connu, l'estimateur du maximum de vraisemblance peut être instable et peut converger vers des maximums locaux malgré l'utilisation de méthodes itératives, c'est pourquoi nous adopterons une approche bayésienne.

## 2.2.2 Estimation par inférence bayésienne

Motivés par des aspects de calculabilité, nous avons commencé par utiliser une simulation basée sur la méthode de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC). N'ayant pas d'informations a priori sur  $\theta$ , pour explorer l'espace des paramètres, nous utiliserons différents exemples de lois a priori  $\pi(\theta)$  et de proposition  $q(\theta|\tilde{\theta})$ . Comme il existe de nombreux estimateurs de  $\theta$  à partir de la loi a posteriori, nous avons choisi de présenter l'estimateur du maximum a posteriori (MAP) pour le comparer à  $\theta_{MLE}$ .

## 2.3 Interpolation sur une nouvelle position

Une fois  $\theta$  estimé,  $C$  est connue donc la loi de  $U$  également. Il nous reste à interpoler le déplacement  $U(X^*)$  sur une nouvelle position  $X^*$ . Comme  $U$  est un processus gaussien, calculer l'espérance conditionnelle revient à effectuer un krigeage (voir Cressie (1993)).

# 3 Applications

Nous reprenons l'exemple présenté dans la Figure 1 pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée. L'estimateur  $\theta_{MLE}$  est obtenu par les algorithmes itératifs suivant : Nelder-Mead, descente du gradient, Newton. Nous utiliserons la Root Mean Square Error (RMSE) pour mesurer la qualité d'interpolation et la carte de la norme du laplacien pour déterminer si le champ de déplacement est lisse. Un résumé de ces critères, suivant la méthode employée, est présenté dans le tableau 1. la Figure 2 présente, pour chaque méthode, les courbes extraites, le champ de déplacement estimé, la grille déformée après application de ce champ sur une grille uniforme et la carte de la norme du laplacien.

Méthode utilisée	RMSE	Maximum laplacien
Nelder-Mead	0.0254	0.7550
Descente du gradient	<b>0.0221</b>	0.4440
Newton	0.0257	0.6791
MAP	0.0407	<b>0.3667</b>

Table 1: Récapitulatif des critères sur l'exemple présenté en Figure 1, en fonction de la méthode utilisée.

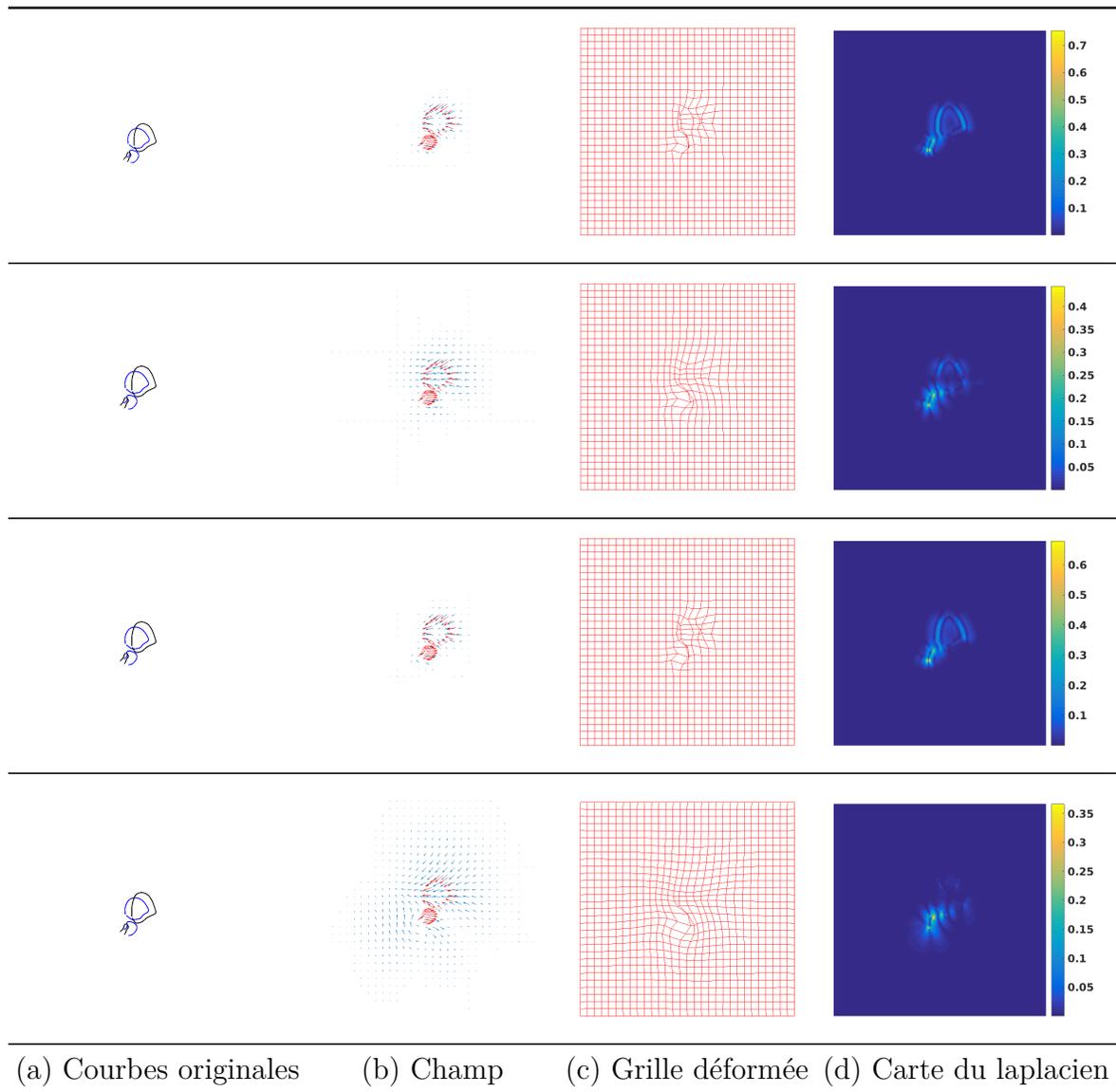


Figure 2: Résultats sur l'exemple présenté en Figure 1, suivant la méthode utilisée. De haut en bas : Nelder-Mead, descente du gradient, Newton, MAP. Sur chaque ligne on présente : a) les courbes originales :  $\beta_1$  en noir et  $\beta_2$  en bleu, (b) le champ de déplacement :  $U_i$  initiaux en rouge et estimés en bleu, (c) la grille déformée, et (d) le laplacien du champ de déformation avec une barre de couleurs montrant l'amplitude en chaque point.

## Bibliographie

- Adler, R. J. and Taylor, J. E. (2007). *Random Fields and Geometry*. Springer Monographs in Mathematics.
- Cressie, N. (1993). *Statistics for Spatial Data, Revised Edition*. Wiley.
- Gneiting, T., Kleiber, W., and Schlather, M. (2010). Matérn cross-covariance functions for multivariate random fields. *Journal of the American Statistical Association*, 105:1167–1177.
- Samir, C., Kurtek, S., Srivastava, A., and Canis, M. (2014). Elastic shape analysis of cylindrical surfaces for 3d/2d registration in endometrial tissue characterization. *IEEE transactions on medical imaging*, 33, issue. 5:1035–1043.
- Stein, M. L. (1999). *Interpolation of Spatial Data*. Springer Series in Statistics.