Probabilités de ruine pour un modèle de risque avec processus de Poisson fractionnaire

Romain Biard [1] & Bruno Saussereau [2]

[1] *Laboratoire de mathématiques de Besançon, UMR CNRS 6623, 16 route de Gray, 25030 Besançon et romain.biard@univ-fcomte.fr*
[2] *Laboratoire de mathématiques de Besançon, UMR CNRS 6623, 16 route de Gray, 25030 Besançon et bruno.saussereau@univ-fcomte.fr*

Résumé. On étudie ici un modèle de risque de renouvellement avec un processus de Poisson fractionnaire composé pour modéliser le montant cumulé des sinistres. Des résultats sur la probabilité de ruine (en temps fini et infini) sont présentés avec des montants de sinistre de distribution à queue lourde.

Mots-clés. Processus de Poisson fractionnaire ; processus de renouvellement ; distribution sous-exponentielle, probabilité de ruine.

Abstract. We study a renewal risk model in which the surplus process of the insurance company is modeled by a compound fractional Poisson process. Some results for the ruin probabilities (finite and infinite time) are presented for heavy-tailed claim size distribution.

Keywords. Fractional Poisson process ; renewal process ; subexponential distribution ; ruin probability.

1 Modèle de risque et théorie de la ruine

En actuariat, la théorie de la ruine consiste en la modélisation mathématique et en l'étude de l'évolution des richesses d'une compagnie d'assurance. La problématique la plus souvent posée dans ce domaine est le calcul de la probabilité de ruine de la compagnie, c'est-à-dire de la probabilité que ses réserves financières passent sous la frontière fatidique du zéro. La théorie de la ruine a pris naissance en Suède au début du 20*ème* siècle dans les travaux de [4], relayés par [5] et [3].
Le modèle classique de la théorie de ruine, le modèle de Cramér-Lundberg, représente l'évolution des réserves d'une compagnie d'assurance par un processus Poisson-composé avec dérive. Explicitement, si on note $(R(t))_{t\geq 0}$ le processus qui modélise les réserves, on a :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i \ , \tag{1}$$

où

— u, c sont deux réels supposés positifs, représentant respectivement les réserves initiales de la compagnie et le taux de cotisation demandé aux assurés, qui est supposé constant,
— $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ représentant le nombre de sinistres,
— X_i est une variable aléatoire positive représentant le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre. Les $(X_i)_{i\geq 1}$ sont supposés indépendants, identiquement distribués (noté i.i.d par la suite) et indépendants de $(N(t))_{t\geq 0}$. On notera F leur fonction de répartition.

Les travaux en théorie de la ruine s'intéressent majoritairement au calcul de la probabilité de ruine, en temps fini et infini dont voici les définitions.

Définition 1 *La probabilité de ruine en temps fini T avec réserves initiales u, notée $\psi(u,T)$ correspond à la probabilité que les réserves deviennent strictement négatives à un instant précédant T. Explicitement, pour $u, T > 0$,*

$$\psi(u,T) = \mathbb{P}\left(\exists s \in [0,T], R(s) < 0\right) .$$

La probabilité de ruine en temps infini est définie naturellement, pour $u > 0$ par

$$\psi(u) = \lim_{T\to\infty} \psi(u,T) = \mathbb{P}\left(\exists s \geq 0, R(s) < 0\right) .$$

2 Le processus de Poisson fractionnaire

Le processus de Poisson fractionnaire a été défini par [7] comme un processus de renouvellement avec des temps inter-arrivées distribués selon une loi Mittag-Leffler. Mathématiquement, la suite des temps inter-arrivées $(\Delta_{T_k})_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes dont la distribution commune est donnée par

$$\mathbf{P}(\Delta_{T_k} > t) = E_{\mathrm{H}}(-\lambda t^{\mathrm{H}}) \tag{2}$$

pour $\lambda > 0$ et $0 < \mathrm{H} \leq 1$, où

$$E_{\mathrm{H}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\mathrm{H}k)}$$

est la fonction de Mittag-Leffler (Γ étant la fonction Gamma d'Euler) définie pour tout nombre complexe z. La distribution des temps inter-arrivée peut être aussi caractérisée par leur transformée de Laplace

$$L_H(\xi) = \mathbf{E}(\exp(-\xi\Delta_{T_k})) = \frac{\lambda}{\lambda + \xi^{\mathrm{H}}}.$$

En notant $T_n = \Delta_{T_1} + ... + \Delta_{T_n}$ le temps d'arrivée du n-ème saut, le processus $(N_{\mathrm{H}}(t))_{t\geq 0}$, défini par

$$N_{\mathrm{H}}(t) = \max\{n \geq 0 \ : \ T_n \leq t\} = \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{T_k \leq t} \tag{3}$$

est un processus de renouvellement avec des temps inter-sauts Mittag Leffler, appelé processus de Poisson fractionnaire de paramètre H. Son espérance est donnée par la formule suivante

$$\mathbf{E}(N_{\mathrm{H}}(t)) = \frac{\lambda t^{\mathrm{H}}}{\Gamma(1+\mathrm{H})} . \tag{4}$$

On peut mentionner ici une définition équivalente du processus de Poisson fractionnaire (voir [6]) en tant que processus de Poisson avec changement de temps $\big(N_1(E_{\mathrm{H}}(t))\big)_{t\geq 0}$ où $(E_{\mathrm{H}}(t))_{t\geq 0}$ est l'inverse, continu à droite, d'un subordinateur standard H$-$stable $(D_{\mathrm{H}}(t))_{t\geq 0}$, i.e. $E_{\mathrm{H}}(t) = \inf\{r > 0 : D_{\mathrm{H}}(r) > t\}$ où $\mathbf{E}\big[e^{-sD_{\mathrm{H}}(t)}\big] = \exp(-ts^{\mathrm{H}})$.

3 Principaux résultats

Nous considérons ici le modèle de risque suivant

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{H}}(t)} X_i \ , \quad t \geq 0 \tag{5}$$

qui est le modèle présenté en (1) où le processus de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ est remplacé par le processus de Poisson fractionnaire $(N_{\mathrm{H}}(t))_{t\geq 0}$. Nous nous focaliserons ici sur des montants de sinistre dont la distribution est à queue lourde. D'autres résultats pour des distributions à queue légère sont présentés dans [2]. On considère donc que les X_i's sont sous-exponentiels (noté $X \in \mathcal{S}$) i.e, avec $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ et $F(t) = \mathbf{P}(X_1 \leq t)$, on a $\lim_{t\to\infty} \overline{F^{*2}}(t)/\overline{F}(t) = 2$ où F^{*2} est la convolé (en distribution) deux fois de F.

Nous rappelons ici un résultat connu qu'on peut trouver par exemple dans [1] (Lemma X.2.2).

Lemme 1 *Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de distribution commune $F \in \mathcal{S}$ et soit K une variable aléatoire indépendante à valeurs entières telle que $\mathbf{E}(z^K) < \infty$ pour un $z > 1$. On a*

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{K} Y_i > x\right) \sim \mathbf{E}(K)\,\overline{F}(x) \ \textit{quand} \ x \to \infty. \tag{6}$$

Voici maintenant un premier résultat pour la probabilité de ruine en temps fini.

Proposition 1 *Soit* $(R_t)_{t\geq 0}$ *le processus de risque défini par (5). Si la distribution* F *des montants de sinistre est sous-exponentielle alors*

$$\psi(u,t) \sim \mathbf{E}(N_{\mathrm{H}}(t))\, \overline{F}(u) \tag{7}$$

quand u *tend vers* $+\infty$.

On a également

$$\psi(u,t) \sim \frac{\lambda t^{\mathrm{H}}\, \overline{F}(u)}{\Gamma(1+\mathrm{H})} \text{ quand } u \to \infty, \tag{8}$$

avec l'expression explicite de la moyenne de $N_{\mathrm{H}}(t)$ donnée par (4).

Preuve
Commençons par les inégalités suivantes

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{H}}(t)} X_i > u + ct\right) \leq \psi(u,t) \leq \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{H}}(t)} X_i > u\right) \tag{9}$$

et appliquons le Lemme 6 à $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{H}}(t)} X_i > x)$ avec $x = u$ ou $x = u + ct$. On peut montrer que $\mathbf{E}(z^{N_{\mathrm{H}}(t)})$ est fini pour tout $z > 1$ (voir [2]) donc avec le Lemme 6 on déduit que

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{H}}(t)} X_i > x\right) \underset{x\to\infty}{\sim} \mathbf{E}(N_{\mathrm{H}}(t))\overline{F}(x).$$

De plus, on a $\overline{F}(u+t) \underset{u\to\infty}{\sim} \overline{F}(u)$. Par conséquent (9) donne (7). □

Voici maintenant le résultat en temps infini.

Théorème 1 *Pour* $i \geq 1$, *soit* $\xi_i = X_i - c\Delta_{T_i}$, $\xi^- = \max\{-\xi, 0\}$ *et*

$$m(x) = \mathbf{E}\min\{\xi^-, x\} = \int_0^x \mathbf{P}(\xi^- > y)dy\,, x \geq 0\,. \tag{10}$$

Supposons que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{m(x)} dF(x) \text{ is finite.} \tag{11}$$

— *Soit* $\overline{G}(x) = \min\left(1, \int_1^{+\infty} \frac{\overline{F}(x+t)}{m(t)} dt\right)$. *Si* $X_1 \in \mathcal{S}$ *et* $G \in \mathcal{S}$ *alors*

$$\psi(u) \sim \frac{\overline{G}(u)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\,, \quad u \to \infty\,. \tag{12}$$

— *Supposons que* $\overline{F}(x) = L(x)x^{-\alpha}$ *avec* L *une fonction à variation lente et* $\alpha > 0$ *(donc* X_1 *est à variation régulière de paramètre* α *et est donc sous-exponentielle).*
  — *Si* $\alpha > \mathrm{H}$ *alors*

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda\Gamma(\alpha - \mathrm{H})}{c^{\mathrm{H}}\Gamma(\alpha)} u^{-\alpha+\mathrm{H}} L(u) \quad u \to \infty\,. \tag{13}$$

  — *Si* $\alpha = \mathrm{H}$ *alors*

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda}{c^{\mathrm{H}}\Gamma(\mathrm{H})} \int_u^{+\infty} \frac{L(t)}{t} dt\,, \quad u \to \infty\,. \tag{14}$$

Références

[1] Asmussen, S. and Albrecher, H. (2010). *Ruin probabilities* second ed. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, 14. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

[2] Biard, R. and Saussereau, B. (2014). Fractional Poisson process : long-range dependence and applications in ruin theory. *J. Appl. Probab.* **51,** 727–740.

[3] Cramér, H. (1930). *On the Mathematical Theory of Risk.* Skandia Jubilee Volume, Stockholm.

[4] Lundberg, F. (1903). *I. Approximerad framstallning av sannolikhetsfunktionen : II. Aterforsakring av kollektivrisker.* Almqvist & Wiksell, Uppsala.

[5] Lundberg, F. (1926). *Försäkringsteknisk Riskutjämning.* F. Englunds Boktryckeri AB, Stockholm.

[6] Meerschaert, M. M., Nane, E. and Vellaisamy, P. (2011). The fractional Poisson process and the inverse stable subordinator. *Electron. J. Probab.* **16,** no. 59, 1600–1620.

[7] Repin, O. N. and Saichev, A. I. (2000). Fractional Poisson law. *Radiophys. and Quantum Electronics* **43,** 738–741.